Jak se liší reálná čísla od racionálních?

Božena Payerová a Ivan Ryant

Obsah

Stručně řečeno: 2
Není číslo jako číslo 2
Strašlivý příběh Pythagorova učedníka 3
Reálná čísla a jejich desítkové rozvoje 5
Kolik je čísel? 6
Paradoxy teorie množin 10
Diagramy pojmů a souvislostí 12
Vysvětlivky 16
Odvození odmocniny ze dvou 16
Důkaz, že jsou čísla, která se nedají vyjádřit poměrem čísel celých 16
Důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální číslo 17
Příklad rozkladu přirozených čísel na prvočinitele 18
Poziční číselné soustavy 18
Periodické rozvoje racionálních čísel 19
Výpočet iracionálního čísla řadou 20
Výpočet iracionálního čísla bisekcí (půlením intervalu) 20
Výpočet iracionálního čísla metodou sečen 24
Odvození kroku výpočtu rovnice metodou sečen 28
Definice množiny přirozených čísel 29
Podivné vlastnosti nekonečen 29
Jak naprogramovat vyjmenovávání reálných čísel 30
Von Neumannův vesmír 32
Božena Payerová 32
Ivan Ryant 33
Návod k použití aneb metodická poznámka 33
Literatura 37
Pomůcky na webu a kontakt na autora 39
Zvuková podoba příběhu 39
Diagramy pojmů a souvislostí 39
Prezentace 39
Animace a interaktivní ukázky 39
Poděkování 40
Kontakt na autora 40

Stručně řečeno:

Racionální čísla jsou např. 1, 0, −3, ¾. Racionální jsou všechna **čísla celá** a také poměry celých čísel, např. tři čtvrtiny. Každé racionální číslo je zároveň i **reálné,** ale naopak ne každé reálné číslo je racionální. Těchto tzv. „iracionálních“ čísel je dokonce naprostá většina (jak uvidíme později). Jak to? – je snadná otázka, ale nesnadná odpověď. Začněme od začátku:

Není číslo jako číslo

Lidé počítali od nepaměti, vždyť i zvířata jako např. mravenci, koně nebo papouškové používají a dobře ovládají **přirozená čísla** [1]. Kdo obchodoval, ten vždycky musel sečítat a odčítat, aby věděl, kolik čeho mu zbývá ve skladu a kdo komu kolik dluží – někdy se dopočítal čísel *záporných*[1], protože (jak říkávali už staří Kenaanci) i prodělek je kšeft, jindy mu zase vyšla čistá *nula* [2]. Úroky a zisky se *poměřují* vzhledem ke vkladům nebo výdajům – a hle: jsou na světě **poměry,** úměra a zlomky[2]. Když člověk pozvedl oči k nebi a sledoval, jak se pohybuje slunce ve dne a hvězdy v noci, začal měřit **úhly** a čas. Egyptští fellláhové, kterým Nil každoročně zaplavil jejich políčka, zase museli umět vždycky znovu vyměřit svoje pozemky, děděné po generace z otců na syny. K tomu potřebovali měřit a počítat přinejmenším **vzdálenosti** a úhly. V tomto umění dosáhli mistrovství stavitelé chrámů a pyramid, kteří navíc **z průměru kruhu uměli spočítat jeho obvod** a naopak. Změřili totiž, že obvod (neboli *perimetr* π) kruhu je 22 sedmin průměru (*diametru* d) s přesností téměř 0,1%, což pro praktické účely bohatě stačí[3]. S těmito znalostmi pak Eratosthenes[4] dokázal dokonce změřit a spočítat obvod zeměkoule s chybou asi jen 10% – což je právě ta informace, která o nějakých 1700 let později chyběla Kolumbovi, aby pochopil, že nedoplul do Indie, nýbrž objevil Ameriku.

Tak se lidé od čísel přirozených (daných živáčkům matkou přírodou) dostali k číslům celým a racionálním (která jsou přístupná bytostem rozumným). Racionální čísla se nazývají „racionální“ prý podle latinského „ratio“ (důvod, vztah, či poměr – protože velikost čitatele je poměřována velikostí jmenovatele) a značí se $\mathbb{Q}$ („quotient“, což také znamená „poměr“) [3].

Pak ovšem ještě zbývá dost zajímavá otázka: Jak moc zaplní racionální čísla číselnou osu? Vyčerpají všechny body číselné osy? Zobrazí se každé racionální číslo jako jeden bod a bude každý bod zobrazovat právě jedno číslo?

Aristotelés v Kategoriích [4] rozlišuje mezi „přetržitostí“ množiny celých čísel a „nepřetržitostí“ přímky složené z bodů. Každé celé číslo má na číselné ose jednoho souseda zleva a jednoho zprava (např. jako jednička v posloupnosti 0, 1, 2). Body na přímce však sousedy nemají a mít nemohou, protože mezi každými dvěma body se nacházejí další body. Totéž platí i pro racionální čísla na číselné ose.

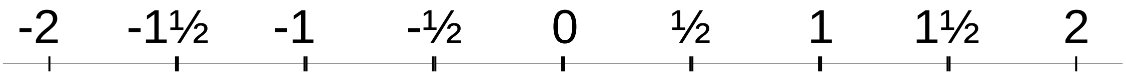
---

1 Záporná čísla začali používat matematici v Indii v 6. nebo 7. století n.l., v Evropě až od 17. století, viz [12]

2 celé číslo se „rozdělí“ či „rozláme“ na stejné díly

3 Jde o Ludolphovo číslo π = 3,1415… zatímco 22 / 7 = 3,1428…, viz [19]

4 Eratosthenes (276–194 př. n. l.) byl zakladatelem vědecké geografie a kartografie, znalcem historie a literatury a také mj. básníkem. Obvod Země odkrokoval, změřil úhloměrem a dopočítal trojčlenkou, když působil v alexandrijské knihovně, viz [20]. Nejvíc se proslavil „Eratosthenovým sítem“, dodnes používanou metodou hledání prvočísel.



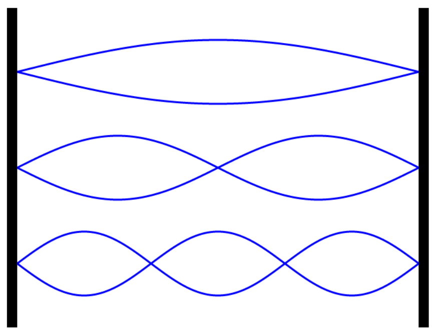
Obrázek 1: Příklad číselné osy s několika vyznačenými racionálními čísly

Všimněte si, že číselná osa uspořádá čísla do posloupnosti (menší vlevo, větší vpravo). Toto uspořádání[5] je v případě racionálních čísel „nepřetržité“ neboli **husté.** Uspořádání bodů do přímky je také *husté*.

Zaplní tedy racionální čísla všechny body číselné osy? Nezaplní: číselnou osu ani zdaleka nevyčerpají. Nejde jen o to, že mezi každými dvěma racionálními čísly je na číselné ose mnohem víc než jen jedno další racionální číslo.[6] Problém je v tom, že posloupnost bodů na přímce je mnohem hustší než posloupnost racionálních čísel na číselné ose. Můžeme si to představit tak, že v husté posloupnosti racionálních čísel stále ještě zůstávají mezery, protože při uspořádání podle velikosti jsou mezi racionální čísla vložena ještě jiná čísla, a to **čísla iracionální**[7]**.** V každé mezeře se totiž nachází právě tolik iracionálních čísel, kolik je všech bodů na ose.[8] To je zdánlivě paradoxní vlastnost reálných čísel, kterou vysvětlil až Georg Cantor někdy po roce 1870 a my se k ní vrátíme v závěru tohoto článku podrobněji.

Strašlivý příběh Pythagorova učedníka

Pythagoras (žil zhruba 570 – 495 př. n. l.) byl z racionálních čísel úplně nadšen. Věřil totiž, že všechny přírodní jevy a děje se jeví a dějí v **poměrech malých** celých čísel a snažil se to taky dokázat. Kromě toho, že věřil v mystiku čísel a v převtělování nesmrtelných duší, byl také vegetarián, muzikant, básník, učitel a filosof [6]. Slovo „filosof“ snad prý pochází přímo od něj – měl totiž údajně opravit jakéhosi pochlebovače, že není ani tak „moudrý“, jako spíš „moudrost milující“, tedy *filosofos*. Vedl školu ve městě Krotónu (dnes Crotone na východním pobřeží Kalábrie v jižní Itálii). Jeho žáci se dělili na „akúsmatiky“ (pasivní poslušné posluchače) a (asi pokročilejší) „mathematiky“ (badatele aktivně studující pythagorejskou nauku)[9].



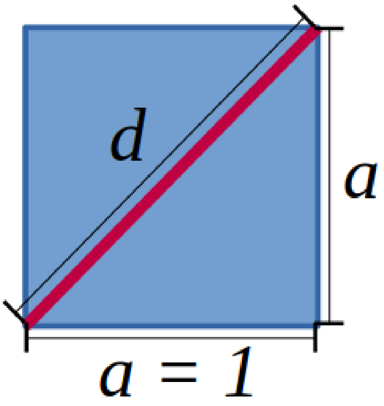
Obrázek 2: Kmitání strun

Pythagoras se zabýval také laděním lyr a objevil, co si můžeme snadno vyzkoušet např. na kytaře nebo na houslích. Dotkneme-li se kmitající struny přesně uprostřed, změní se tón o oktávu výš. Buď můžeme strunu přitisknout k hmatníku, takže bude kmitat jen půl struny, anebo letmým dotekem vytvoříme uprostřed kmitající struny „uzel“,

---

5 Později uvidíme, že jiné uspořádání racionálních čísel bude „přetržité“.
6 Problém dokonce není ani v tom, že totéž co pro body na přímce platí obdobně i pro body na úsečce. Úsečka sice není přímka, ale bodů na úsečce i na přímce je stejně velké nekonečné množství. Podobně: racionální interval sice není celý obor racionálních čísel, ale racionálních čísel v intervalu je stejně velké nekonečné množství jako množství všech racionálních čísel. Více a podrobněji viz vysvětlivka Podivné vlastnosti nekonečen
7 Všechna *racionální* a *iracionální čísla* tvoří dohromady množinu čísel **reálných.**
8 Nenechte se zmást: nejde o to, že přímka je nekonečně dlouhá ani že obor reálných čísel nemá horní a dolní mez – totéž co pro přímku a obor reálných čísel platí i pro úsečku a reálný interval. Jde o hustotu a děravost množin – což (uznávám) je *fakt dost hustý*. Holt není nekonečno jako nekonečno a celou osu nevyplní čísla racionální, nýbrž až čísla reálná.
9 Vypadá to, že od Pythagora pochází i pojmenování matematiky.

který rozpůlí dlouhou „kmitnu“ (tj. vlastně stojatou vlnu) na dvě krátké (a zahrajeme flažolet). Rozpůlením vlny se zdvojnásobí frekvence a tedy i výška tónu.[10] Podobně: když necháme znít $^4/_5$ struny, tón se zvýší o „velkou tercii“ (např. z G na H), při třech čtvrtinách o kvartu (např. z G na C) a při dvou třetinách o kvintu (např. z G na D). Hrajeme-li tóny postupně, vzniká *melodie.* Zahrajeme-li je současně, vznikne *akord – harmonie.* Pythagoras šel ovšem ve svých úvahách tak daleko, že ze souzvuků strun odvodil „hudbu sfér“ – **harmonii země, nebeských sfér a kosmu vůbec,** viz [7] – a to vše v poměrech malých celých čísel.



Obrázek 3: Úhlopříčka jednotkového čtverce

Pak se ale stalo něco, co nečekal. Učedník Hippasos se zeptal Mistra: „Učiteli, jakým poměrem celých čísel vyjádříš délku úhlopříčky čtverce?“ Pythagoras se nejprve zamyslel. Dejme tomu, že strana čtverce *a* bude měřit jednu délkovou jednotku. Pak dosadil do své slavné věty a odvodil[11], že $d = \sqrt{2}$.

Potom dlouho, ale marně hledal, jakým poměrem celých čísel by vyjádřil odmocninu ze dvou… Pythagorovi učedníci byli vázáni mlčenlivostí a nesměli nezasvěcencům vyzrazovat tajemství matematiky, ale Hippasos možná neudržel jazyk za zuby, nebo možná udržel, ale Pythagoras se bál, že tajemství vyzradí později, anebo Pythagorovi vadilo ještě něco jiného: Hippasovi se totiž podařilo zpochybnit a možná i vyvrátit Pythagorovo učení – a to Mistři neodpouštěli tenkrát a neodpouštějí ani dneska. Pythagorejci byli zdrceni a sám Pythagoras se cítil zesměšněn. Hippasos pak byl prý na Pythagorův rozkaz utopen a o nějakých dvě stě padesát let později napsal velký odpůrce pythagorejské mystiky Aristotelés pro svého syna Níkomacha toto ponaučení: *„Slušno však a nutno pro záchranu pravdy vyvrátiti i své vlastní učení, a to zvláště těm, kteří jsou filosofy…“* – viz [8].

> Zajímavé snad je, že na rozdíl od jiných význačných iracionálních čísel (jako je např. Eulerovo nebo Ludolphovo číslo), není obvyklé odmocninu ze dvou po nikom pojmenovávat. Z ne zcela věrohodných zdrojů jsem však vyrozuměl, že by se snad měla nazývat Pythagorovou konstantou. Z odporu k takovému cynickému překrucování historické pravdy pojmenovávám nyní a zde odmocninu ze dvou jménem jejího pravého objevitele: **Hippasovo číslo.**

Bylo Pythagorovo učení vyvráceno, anebo jen zpochybněno? K vyvrácení by totiž byl potřebný přesvědčivý *matematický důkaz.* Takových důkazů se dá najít celá řada a většinou neobsahují nic, co by pythagorejci neznali (např. krácení zlomků, rozklad přirozeného čísla na prvočinitele, sudost a lichost). Zajímavé na těchto důkazech je, že nebývají tzv. *přímé.* Pythagorejci zřejmě uměli vyvrátit domněnku nepřímo, a to sporem.[12]

Vyvrátili tedy pythagorejci svoje vlastní učení? Jistotu nemáme, ale je pravděpodobné, že Pythagorovo učení o poměrech celých čísel nakonec vyvrátili. Tím se ovšem dosud zdánlivě krotký mazlík z matematického zvěřince čísel projevil jako netušená bestie, ze které jde mnohem větší hrůza než z pythagorejské mystiky – ta teď klesla na úroveň strašidel z pohádek pro malé děti. Ovšem tam, kde bázlivci oprávněně pociťují hrůzu z neznáma, odvážní vidí příležitost poznávat

10 Vyzkoušejte na interaktivní názorné pomůcce, viz KmitaniStrun_Animace.html
11 Viz vysvětlivka „Odvození odmocniny ze dvou“
12 Viz vysvětlivky „Důkaz, že jsou čísla, která se nedají vyjádřit poměrem čísel celých“ a „Důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální číslo“

neznámé k užitku sobě i druhým. Georg Cantor (nar. 3. března 1845) patřil k těm odvážným. Po dlouhém bádání, neschopen dobrat se vytčených výsledků a vyvrátiv svou vlastní teorii množin (za což ho pak někteří kolegové matematici nenáviděli asi hlavně proto, že jim rozbil jejich oblíbenou hračku) přibližně 2400 let po Hippasově vraždě starý, neúspěšný, nepotřebný, nenáviděný a opuštěný kolegy i svými žáky propadl pocitu beznaděje a zoufalství a poslední léta svého života strávil odložen jako nepotřebná věc v sanatoriu, kde 6. ledna 1918 ve čtvrtém roce Velké války zemřel v bídě a vyhladovělý na zástavu srdce (viz [10]).

Reálná čísla a jejich desítkové rozvoje

Ačkoli reálná čísla objevili už pythagorejci, teprve osvícenci 17. a 18. století na nich založili infinitezimální počet (limity, derivace, integrály aj., viz [11]). Exaktně definoval reálná čísla až Georg Cantor v roce 1871, viz [12]. Název pochází ze 17. století od bělohorského hrobníka samostatnosti české, průkopníka racionální metody ve vědě a matematika Reného Descarta, který tak rozlišoval mezi reálnými a imaginárními kořeny mnohočlenů, potažmo mezi reálnou a imaginární složkou komplexních čísel [13].

Kromě odmocniny ze dvou se v historii objevila i jiná iracionální čísla, např. Ludolphovo číslo π = 3,14… (poměr obvodu a průměru kruhu), Eulerovo číslo e = 2,71… (základ přirozeného logaritmu ln *x*)[13] nebo zlatý řez vyjádřený poměrem 1,618… / 1 (ve výtvarném umění je považován za ideální proporci)[14].

Proč píšu za poslední číslicí iracionálního čísla tři tečky? Samozřejmě: naznačuji, že chybějí další číslice, protože desítkový rozvoj iracionálního čísla je nekonečný. Ostatně je nekonečný nejen v soustavě desítkové, ale v kterékoli poziční číselné soustavě s přirozeným základem[15] (dvojkové, trojkové, osmičkové, šestnáctkové…).

> **Pro srovnání:** Racionální čísla taky mívají nekonečné desítkové rozvoje, např. 1 / 3 = 0,3333… = $0{,}\overline{3}$, ale rozdíl je v tom, že **nekonečné rozvoje racionálních čísel jsou „periodické“**. Kromě toho: každé racionální číslo se dá zapsat konečným počtem číslic ve vhodné poziční číselné soustavě.[16]

Iracionální čísla se takhle jednoduše nedají vyjádřit konečným počtem číslic. Pro některá iracionální čísla se ale dají najít nekonečné řady: čím více členů řady posčítáme, tím přesnější hodnotu hledaného čísla získáme.[17] Nemluvě o tom, že odmocňovat se dá tužkou na papír podobně jako dělit, viz [14]. Připadají vám uvedené postupy výpočtu iracionálních čísel nepochopitelné? Nezoufejte!

---

13 Eulerovo číslo e (viz [21]) je základ „přirozeného logaritmu“ ln *x* (viz [22]), běžně používaného v matematice a fyzice. Přirozený logaritmus je funkce, která vznikne např. integrací funkce 1 / *x*. Toho se využívá např. při výpočtu práce, kterou vykoná plyn při ději izotermickém – v pV-diagramu nás zajímá plocha pod izotermou. Viz též [25], kapitola „Odkud se vzalo Eulerovo číslo“, https://www.matweb.cz/eulerovo-cislo/

14 Zlatý řez (viz [23]) je poměr, který vyhoví podmínce $(a + b) / a = a / b$). Objevuje se v přírodě a využívá se ve výtvarném umění. Např. Dientzenhoferova monumentální budova konventu v Kladrubech u Stříbra působí na pozorovatele útulným dojmem právě proto, že poměr šířky a výšky jejího průčelí odpovídá zlatému řezu. Naproti tomu Santiniho přestavba nedalekého kostela působí znepokojivě, protože zlatý řez porušuje.

15 Viz vysvětlivka „Poziční číselné soustavy“

16 Viz vysvětlivka „Periodické rozvoje racionálních čísel“

17 Viz vysvětlivka „Výpočet iracionálního čísla řadou“ nebo [17] a [18]

O hodně názornější je totiž postupné řešení rovnic jednoduše tzv. *bisekcí* nebo efektivněji *metodou sečen.*

Např. Hippasovo číslo můžeme počítat jako řešení rovnice $x^2 = 2$. Přesného výsledku ani *bisekce*, ani *metoda sečen* nedosáhne, stejně jako řady nebo písemné odmocňování. Nicméně i v tomto případě můžeme dosáhnout libovolné přesnosti – čím déle budeme počítat, tím přesnějšího výsledku se dopracujeme. Takový výpočet může být ovšem pořádná dřina. Což je právě ideální úloha pro počítač přesně podle zásady *„dřinu strojům, myšlení lidem“*[18].

Tolik k iracionálním číslům: Nedají se zapsat jako posloupnost konečného počtu číslic. Dá se však vyslovit, napsat nebo naprogramovat předpis či návod, jak iracionální číslo počítat. Takový předpis pro nekonečný výpočet však není *algoritmus*, protože nemůže dospět k výsledku konečným počtem kroků.

Iracionální čísla mají nekonečné rozvoje, které nejsou periodické.

Kolik je čísel?

Spočítat čísla není snadné. Když začneme od jedničky a budeme počítat jedna, dvě, tři atd., tak můžeme počítat až do smrti (nebo až nás to počítání přestane bavit) – a konce se nedopočítáme, protože za každým číslem následuje nějaké další číslo. Můžeme takovou úlohu svěřit počítači a ten se sice po nějaké době zastaví, ale ne proto, že by odpočítal všechna přirozená čísla, ale protože se dopočítá k tak velikému číslu, že s ním už neumí počítat dál. A jestli se nezastaví z tohoto důvodu, tak prostě proto, že zaplní všechnu svoji paměť.

Můžeme uvažovat ještě jinak, ve stylu „co by kdyby“: kdybychom mohli počítat libovolně dlouho, museli bychom se ke kterémukoli přirozenému číslu jednou dopočítat po odpočítání konečného počtu čísel. To ovšem neznamená, že by množství všech přirozených čísel bylo konečné. Naopak, je nekonečné, protože za každým přirozeným číslem následuje další číslo o jednu větší – např. za jedničkou dvojka, za sedmičkou osmička, za stovkou stojednička apod. Tímto způsobem můžeme definovat množinu přirozených čísel. A abychom si usnadnili další úvahy, začneme počítat přirozená čísla raději od nuly.[19]

0	1	2	3	4	5	6	7	...

Obrázek 4: Vyjmenovávání přirozených čísel

Nyní, když máme množinu přirozených čísel, můžeme se ptát: Kolik je přirozených čísel? Kolik je čísel celých? Kolik racionálních? A kolik reálných? A dají se spočítat body tvořící přímku? Ale pozor na to – hledání odpovědí na tyto otázky stálo Georga Cantora zdraví a nakonec i život…

Odpověď vypadá na první pohled jednoduše: přirozených, celých, racionálních i reálných čísel právě tak jako bodů na přímce je nekonečně mnoho – ale kolik je nekonečně mnoho? Zdá se přece, že celých čísel musí být víc než přirozených, protože mezi celá čísla patří všechna čísla přirozená a navíc ještě čísla záporná. Můžeme je odpočítávat jedno po druhém např. takto:[20]

18 Viz vysvětlivky „Výpočet iracionálního čísla bisekcí (půlením intervalu)“ a „Výpočet iracionálního čísla metodou sečen“

19 Viz vysvětlivka „Definice množiny přirozených čísel“

20 Vyjmenovávání čísel přirozených, celých a racionálních se předvádí v názorné pomůcce, viz Vyjmenovavani.html

…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

Obrázek 5: Vyjmenovávání celých čísel

Výsledkem je pak tento výčet:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, …

Na jednu stranu to vypadá, že počet prvků množiny celých čísel $|\mathbb{Z}|$ musí být dvojnásobný proti počtu prvků v množině čísel přirozených $|\mathbb{N}|$ a jestli máme mezi přirozenými čísly i nulu, tak bychom měli ještě odečíst jedničku: $|\mathbb{Z}| = 2 \cdot |\mathbb{N}| - 1$. Jenže my na to můžeme jít i jinak: můžeme prvky množiny $\mathbb{Z}$ očíslovat – a to – světe div se! – čísly přirozenými (nulu si nemusíme, ale můžeme odpustit):

1.: 0
2.: 1
3.: –1
4.: 2
atd.

Každé celé číslo tak dostane přiřazené svoje pořadové číslo přirozené. To ale znamená, že přirozených čísel nemůže být méně než čísel celých… Tak tenhle paradox Cantor ještě překonal a vyrovnal se s ním celkem jednoduše: nekonečno není číslo jako každé jiné. To neznamená nic horšího, než že s nekonečny se prostě nedá počítat jako s „normálními“ čísly. Jak ale vyjádřit počet prvků (neboli **mohutnost,** případně *kardinalitu*) nekonečné množiny? Georg Cantor byl geniální, a proto si poradil snadno: mohutnost nekonečných množin se bude označovat zvláštním druhem čísel – *čísly kardinálními.* A začal mohutností množiny čísel přirozených, kterou označil $\aleph_0$ (čteme: alef nula[21]). Vzhledem k tomu, že se přirozená čísla dají vyjmenovávat, nazývá se mohutnost této množiny **nekonečná spočetná.**[22]

Zbývá ještě otázka, jak porovnávat mohutnosti nekonečných množin? Cantorova odpověď je opět geniálně jednoduchá: dvě množiny A a B mají stejnou mohutnost, právě když se jejich prvky dají přiřadit vzájemně jednoznačně – tj. najdeme zobrazení, které

- každému prvku množiny A přiřadí právě jeden prvek množiny B tak, že i
- každý prvek množiny B bude přiřazen k právě jednomu prvku množiny A.

Takového přiřazení jsme dosáhli např. očíslováním celých čísel čísly přirozenými.

Dokážeme očíslovat přirozenými čísly i čísla racionální?[23] Na první pohled to vypadá jako nemožná věc. Racionální číslo je poměr dvou čísel celých, takže bychom měli vyjmenovávat dvojice celých čísel a žádnou nevynechat… Uspořádejme si racionální čísla pro názornost do tabulky. Řádky očíslujeme jedním číslem celým (poslouží jako jmenovatel) a sloupce druhým číslem celým (čitatel):

21 Alef je první písmeno hebrejské abecedy a slouží i jako číslice 1.
22 Viz [25] a tam kapitola „Spočetné množiny“, https://www.matweb.cz/spocetne-mnoziny/
23 Viz [25] a tam podkapitola „Velikost racionálních čísel“, https://www.matweb.cz/spocetne-mnoziny/

		jmenovatel					
-3/3	-2/3	-1/3	3	1/3	2/3	3/3	
-3/2	-2/2	-1/2	2	1/2	2/2	3/2	
-3/1	-2/1	-1/1	1	1/1	2/1	3/1	
−3	−2	−1	0	1	2	3	čitatel
-3/-1	-2/-1	-1/-1	−1	1/-1	2/-1	3/-1	
-3/-2	-2/-2	-1/-2	−2	1/-2	2/-2	3/-2	
-3/-3	-2/-3	-1/-3	−3	1/-3	2/-3	3/-3	

Obrázek 6: Vyjmenovávání racionálních čísel názorně

A teď můžeme vyjmenovávat.[24] Začneme opět od nuly. Budeme propátrávat napřed blízké a potom vzdálenější okolí hodnoty 0 cestou ve tvaru soustředných čtverců (nebo spíš jakousi hranatou spirálou). Občas se stane, že narazíme na zlomek se stejnou hodnotou jako jiný zlomek, který už je ve výčtu, např. 2/2 a 3/3 nebo 1/2, 2/4 a 3/6 apod. (v tabulce vyznačeno růžovými číslicemi). Tato drobná vada na kráse není podstatná a dá se při procházení tabulky průběžně detekovat a opravovat. Také hodnotu 0 uvedeme jen jednou – a to hned na začátku. Výsledkem je pak tento výčet:

0, 1/1, -1/1, 2/-1, 2/1, 1/2, -1/2, 3/-2, 3/-1, 3/1, 3/2, 2/3, 1/3, -1/3, -2/3, …

Výše uvedený názorný postup můžeme výrazně zjednodušit. Podobně jako při vyjmenovávání celých čísel, i zde můžeme ke každé dosažené hodnotě racionálního čísla hned vyrobit i hodnotu s opačným znaménkem. V tom případě se můžeme omezit jen na kladné čitatele a kladné jmenovatele (a ve výčtu nevynecháme ani nulovou hodnotu). Tabulka na následujícím obrázku je vlastně pravá horní čtvrtina předcházející tabulky. Vzniklo nám tak něco na způsob ligové tabulky. V lize taky hraje každý s každým, podobně jako my potřebujeme spárovat každého čitatele s každým jmenovatelem. Jak budeme tuto tabulku procházet? Vyjdeme zase od nuly a budeme procházet tabulku z levého dolního kouta po úhlopříčkách, které jak se vzdalují od počátku, stávají se delšími a delšími:

jmenovatel					
4	1/4				
3	1/3	2/3			
2	1/2	2/2	3/2		
1	1/1	2/1	3/1	4/1	
0	1	2	3	4	čitatel

Obrázek 7: Vyjmenovávání racionálních čísel zjednodušeně

Výsledkem je pak tento výčet:

0, 1/1, -1/1, 2/1, -2/1, 1/2, -1/2, 3/1, -3/1, 1/3, -1/3, 4/1, -4/1, 3/2, -3/2, 2/3, -2/3, 1/4, -1/4, …

V pořadí, jak vyjmenováváme, můžeme krok za krokem postupně i číslovat: Vidíme, že i racionální čísla dokážeme očíslovat čísly přirozenými. Takže mohutnost množiny racionálních čísel je

24 Vyzkoušejte na interaktivní názorné pomůcce, viz Vyjmenovavani.html

také nekonečná spočetná. A to také znamená, že v tomto uspořádání je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ „přetržitá“[25] a **uspořádání není *husté*** (tj. mezi dvěma čísly v posloupnosti není žádné třetí číslo).

Postupným vyjmenováváním se ke každému racionálnímu číslu dostaneme konečným počtem kroků, ale proces vyjmenovávání neskončí. Postupně budeme vyjmenovávat zlomky se stále většími a většími čitateli i jmenovateli, takže budeme dospívat nejen k číslům větším a větším v absolutních hodnotách (jak porostou čitatele ve zlomcích), ale také budeme stále hustěji vyplňovat mezery mezi čísly už dříve vyjmenovanými (jak porostou jmenovatele). Přesto tímto způsobem nezaplníme mezery mezi čísly na číselné ose: Každé číslo, které budeme jmenovat, bude racionální, protože bude tvořeno poměrem čísel celých, a to proto, že k němu dospějeme konečným počtem kroků. Pokud bychom každý vyjmenovaný zlomek rozvinuli do posloupnosti číslic v desítkové soustavě, mnohé rozvoje by byly nekonečné periodické – a ty periody by byly stále delší a delší. Některá z vyjmenovávaných čísel by však periodická nebyla – víc a více by se přibližovala k iracionálním číslům, jako je např. π nebo $\sqrt{2}$ – ale nikdy by konečným počtem kroků jejich přesné hodnoty nedosáhla. To proto, že iracionální čísla mají rozvoje jednak nekonečné, ale navíc ještě neperiodické. Dá se to však říct i tak, že vyjmenovávání by dospělo k přesným hodnotám iracionálních čísel po nekonečném počtu kroků.[26]

Teď bychom ještě měli najít způsob, jak očíslovat čísla reálná… Vyjmenovávat reálná čísla opravdu není snadná věc, protože pro ně při libovolném uspořádání platí nejen to, že mezi každými dvěma je ještě nejméně jedno (ve skutečnosti ovšem mnohem víc). Vracíme se tedy zpět k problému, se kterým jsme se setkali hned zpočátku. Zajímavé však je, že i fakt hodně hustá množina bez mezer se dá vyjmenovávat – a že se to dá i naprogramovat na počítači nebo spíš v síti počítačů. Takový program je však lepší nikdy nespouštět. Nejenže to není algoritmus, který by postupoval krok za krokem, po vykonání konečného počtu kroků skončil a vydal výsledek. Jeho vlastnosti jsou daleko horší: bude mít snahu využít každý procesor a každý kousek paměti, který bude k dispozici (a stejně mu to nebude stačit: reálná čísla nevyjmenuje, dokonce ani výpočet žádného iracionálního čísla nikdy nedokončí). Jeden takový návrh programu najdete ve vysvětlivce „Jak naprogramovat vyjmenovávání reálných čísel“.

Co se stane, když tento program spustíme? Možná ani nestihneme zjistit, že jsme právě vytvořili nejdestruktivnější DDOS-virus v lidských dějinách, které tímto definitivně končí. Počítače a sítě celého světa jsou zahlceny vyjmenováváním čísel, zhroutily se veškeré komunikační sítě, nefunguje policie, záchranka, doprava, obchod, výroba, armády ani státy. A za to všechno může Hyppasos, který vypustil bestii iracionálních čísel do světa.

Stejným postupem by se daly systematicky vyjmenovávat body na přímce. Díky tomu nám zrovna přímky slouží jako číselné osy ke znázorňování grafů funkcí. Množina bodů na přímce je hustá a nejsou v ní mezery. Právě tak hustá a bez mezer je i množina reálných čísel – tvoří *kontinuum.*

Pokusy o vyjmenovávání čísel, bodů nebo množin, které zde předvádím, souvisí s otázkou, co všechno se dá v matematice zkonstruovat postupem, který si člověk vymyslí. To znamená, že to, co zkonstruuje, vlastně vymyslí. Patří do matematiky i to, co člověk nevymyslí a nezkonstruuje? Dá se v matematice vymyslet a zkonstruovat všechno? Jsou matematici, kteří se domnívají, že matematika i s iracionálními čísly a nespočetnými množinami není nic objektivního, že jde jen o lidský výmysl

25 Věnujme znovu tichou vzpomínku Aristotelovi a jeho Kategoriím.
26 ...spíš nedospělo. Uvedená formulace je možná působivá, ale korektní zřejmě není. Nekonečno není přirozené číslo.

– ale to je menšinový názor obecně považovaný za matematickou herezi. Většina matematiků totiž podobně jako kdysi Pythagoras věří i dnes, že matematika je něco tajemného, co si lidé nevymýšlejí, nýbrž objevují.

Mohutnost množiny reálných čísel se označuje $\aleph_1$ – což je mohutnost **nekonečná nespočetná.**

Paradoxy teorie množin

Kdo dočetl až sem, ten se už dozvěděl o rozdílu mezi racionálními a reálnými čísly všechno podstatné. Proč jsem tedy na závěr zařadil ještě paradoxy teorie množin? Byla řeč o množinách čísel a množině bodů tvořících přímku a také o rozdílu mezi množinami spočetnými a nespočetnými – pořád jsme vystačili s intuitivním pojetím množin a žádné paradoxy nás nezastavily. Za posledních více než sto let se ukázalo, že pro praktické účely Cantorova intuitivní teorie množin naprosto vyhovuje. Středoškoláci, technici ani ekonomové se s paradoxy teorie množin v praxi nesetkají. To ale neznamená, že by o množinových paradoxech neměli vědět, že by neměli znát hranice, za kterými intuitivní chápání množin selhává. Kromě toho: bez množinových paradoxů by příběh Georga Cantora, který zde vyprávím, nedospěl k rozuzlení, které čtenářům přibližuje, jak se matematické myšlení liší od myšlení založeného spíš na zkušenosti a k ze zkušenosti plynoucí *reflektované existenciální praxi.* A navíc: zpochybnit základy všeho, co zde bylo až dosud řečeno, je zdravým podnětem k zamyšlení a východiskem k dalšímu studiu. Tak tedy do toho:

Hrdě se hlásíme k Bernardu Bolzanovi jako průkopníkovi teorie množin, nicméně to, co se o množinách učí žáci základních a středních škol, vymyslel až Georg Cantor. Pak se mu ovšem stala ta nehoda, že začal uvažovat o mohutnosti množiny všech množin – označme ji U jako „universum“. Intuitivně vzato, není na tom nic divného… Každá množina má nějaký počet prvků: prázdná množina 0, každá jednoprvková 1 a universum třeba nějaké abstraktní *n* (což bude zřejmě nekonečně mnoho). A pak se to stalo! Ona totiž každá množina má taky nějaké podmnožiny, např. prázdná množina je sama sobě i podmnožinou, jednoprvková množina má dvě podmnožiny: prázdnou a sebe samu, tříprvková osm podmnožin, desetiprvková 1024 podmnožin.[27] Jestliže má množina *n* prvků, je počet podmnožin 2^n – např. $2^0 = 1$, $2^3 = 8$. Až sem by to šlo. Ale s množinovým universem U to takhle nejde. Jestliže U má být množina *všech* množin, tak musí obsahovat i všechny svoje podmnožiny – a těch je 2^n. **Pak tedy musí platit, že $n \geq 2^n$.** Problém je v tom, že ***n* je vždycky menší a nemůže být ani rovno 2^n.** To platí i pro nekonečně mohutné množiny, jako je U, protože není žádné vzájemně jednoznačné zobrazení mezi prvky a podmnožinami množinového universa U. A to je paradox, kterým Georg Cantor rozbil svoji teorii množin.[28]

Tuhle katastrofu ve svém bádání už nerozdejchal, neboť „přílišné bádání člověka unaví,“ jak praví Kazatel. Cantor zveřejnil svůj množinový paradox v roce 1899 (viz [15]). Již dva roky před tím byl zveřejněn množinový paradox Burali-Fortiho[29], který však byl považován za jakousi nevýznamnou nedokonalost intuitivního chápání množin a za výjimku, která běžnému využití množin v matematice nebrání (viz [16]). Až později se ukázalo, že každý paradox je v matematice zásadní, a proto i teorie množin musela být konec konců důkladně přepracována. A pak přišla

27 Počítání podmnožin se dá snadno pochopit z přehledné tabulky – viz PocetPodmnozin.html
28 Porovnání, jak rychle roste funkce $f(n) = 2^n$ ve srovnání s $f(n) = n$ je předvedeno v názorné pomůcce – viz PocetPodmnozin.html
29 Cesare Burali-Forti (1861–1931 byl italský matematik, viz https://it.wikipedia.org/wiki/Cesare_Burali-Forti

poslední rána – a tou byl paradox Russelův: **„množina všech množin, které neobsahují samy sebe“** je sice správně zformulovaná definice, ale dobrý smysl nedává. Myšlenka, že množina může sama být prvkem množiny, je v pořádku. Dokonce se zdá, že z množin, které obsahují jiné množiny, můžeme zkonstruovat všechny předměty, kterými se matematika zabývá,[30] neboť v matematice je všechno množina.[31]

V čem je tedy Russelův paradox paradoxní? Jestliže totiž ona správně definovaná množina nebude obsahovat sama sebe, musíme ji tam přidat (protože definice to vyžaduje). V tom okamžiku ale přestane vyhovovat definici, protože bude obsahovat množinu, která obsahuje sebe samu – a to podle definice nesmí. Ať uděláme, co uděláme, je to vždycky špatně – **což je vlastně docela ze života –** ale matematika jako věda to neunese a neunesl to ani Georg Cantor.

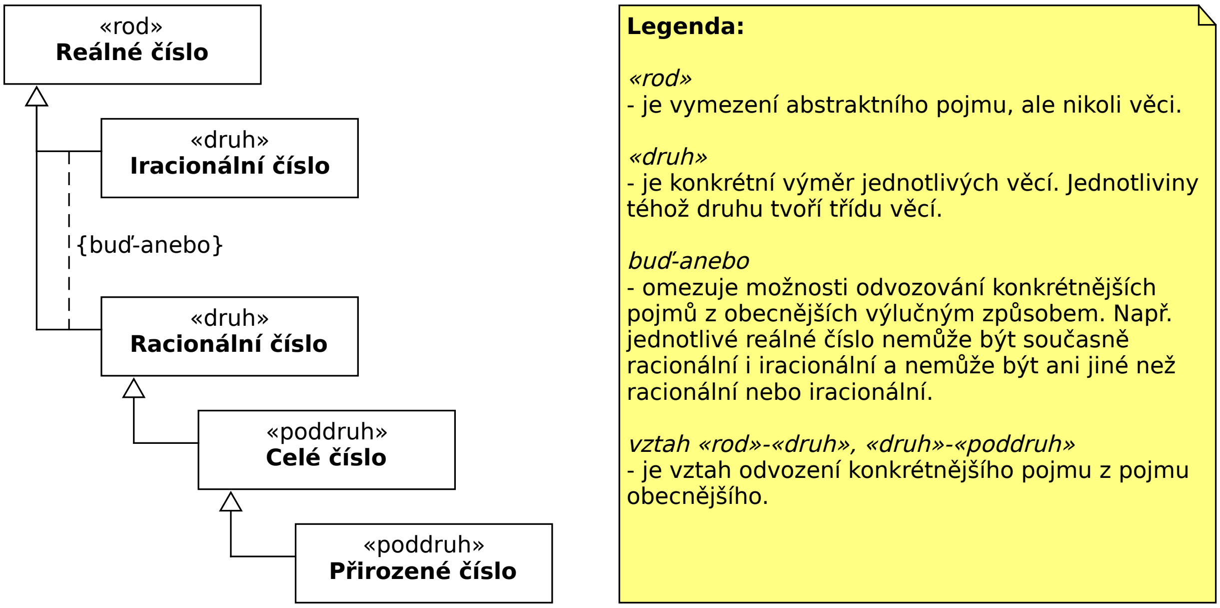
Jenže po nešťastném Georgu Cantorovi přišli jiní – zejména John von Neumann s Paulem Bernaysem a Kurtem Gödelem nebo Ernst Zermelo s Adolfem Fraenkelem – a ti dali dohromady důkladné definice teorie množin založené na axiomech. Od té doby matematika zase funguje a slouží lidem. Zoufal si tedy Georg Cantor bezdůvodně? – Snad stačilo jenom pár let posečkat a sledovat, jak se zamračená obloha teorie množin zase rozjasní a nenávistníci utřou? Roku 1901, kdy Russel zrovna zveřejnil svůj paradox, napsal Tomáš Masaryk ve svých *Ideálech humanitních* [27] – jako by snad Cantorovi právě včas dobře radil:

„Odměřuj všechno správně, co nedoděláš ty, dodělají jiní.“

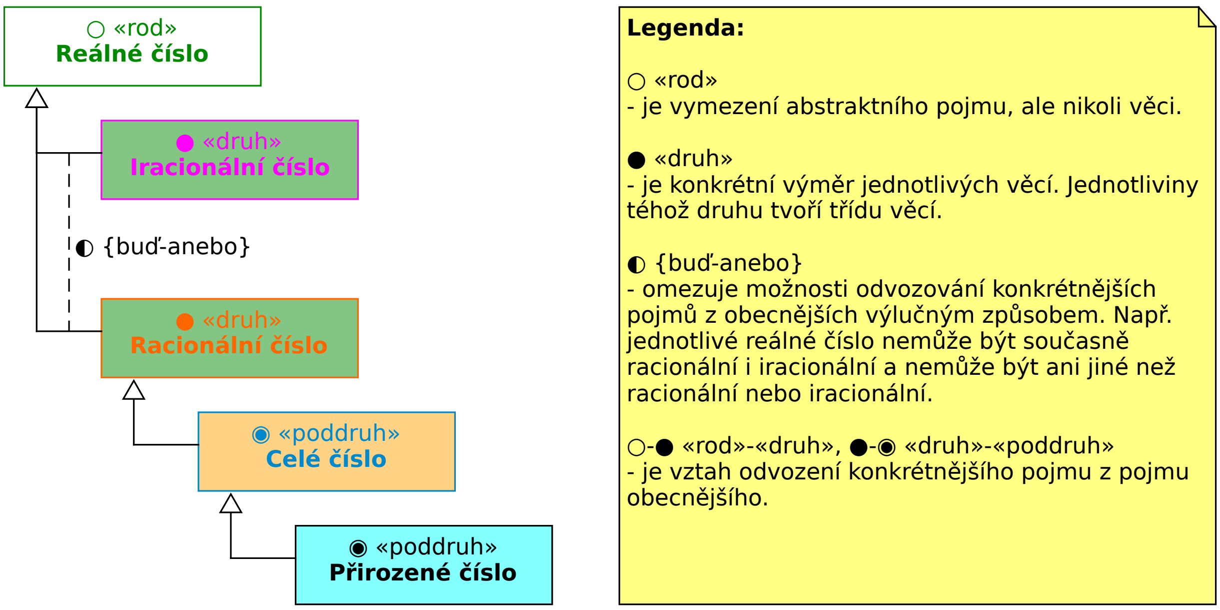
Zkuste tohle příležitostně říct svému učiteli nebo šéfovi…

30 Podrobněji viz vysvětlivka „Von Neumannův vesmír“
31 …a kdo slepě neuvěří bezdůvodnému tvrzení, že jsou množiny, ten se nemůže stát matematikem, protože zboří celý velechrám matematiky podobně jako ten, kdo v košickém dómu svaté Alžběty vytrhne z jednoho pilíře ten správný kámen, o který se celá stavba opírá – a dóm se zřítí.

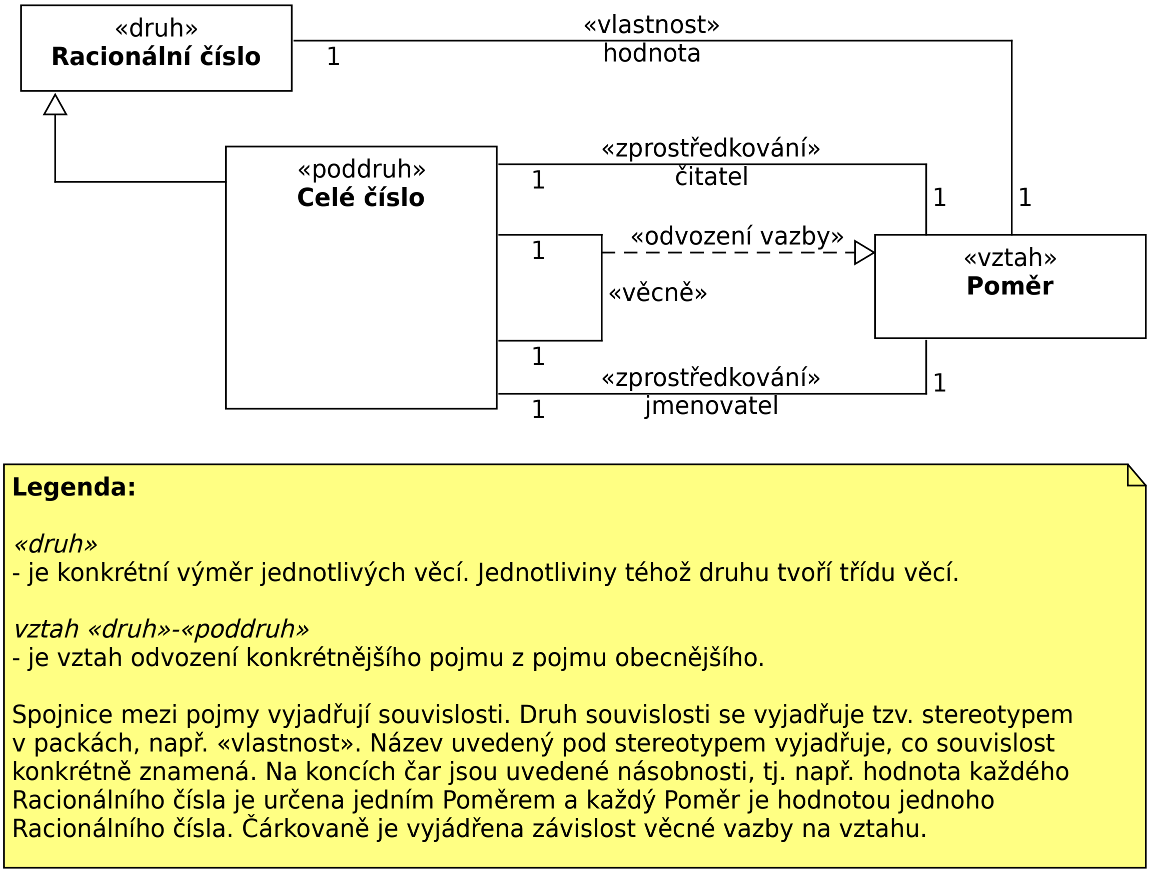
Diagramy pojmů a souvislostí



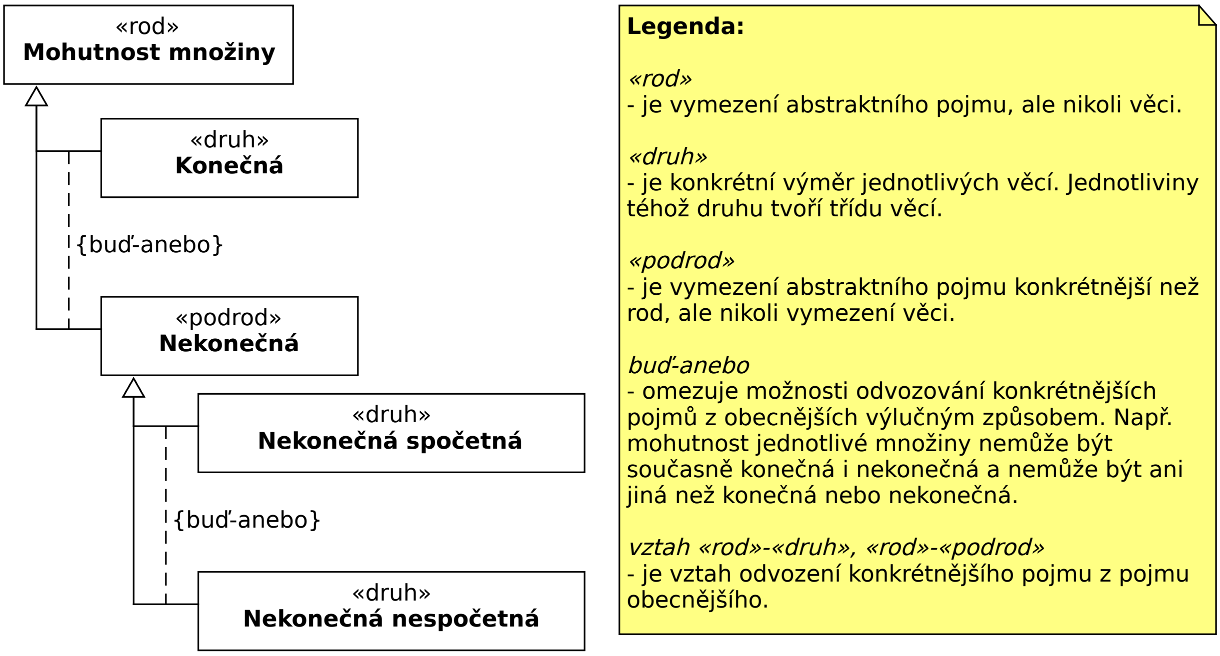
Obrázek 8: Hierarchie číselných oborů



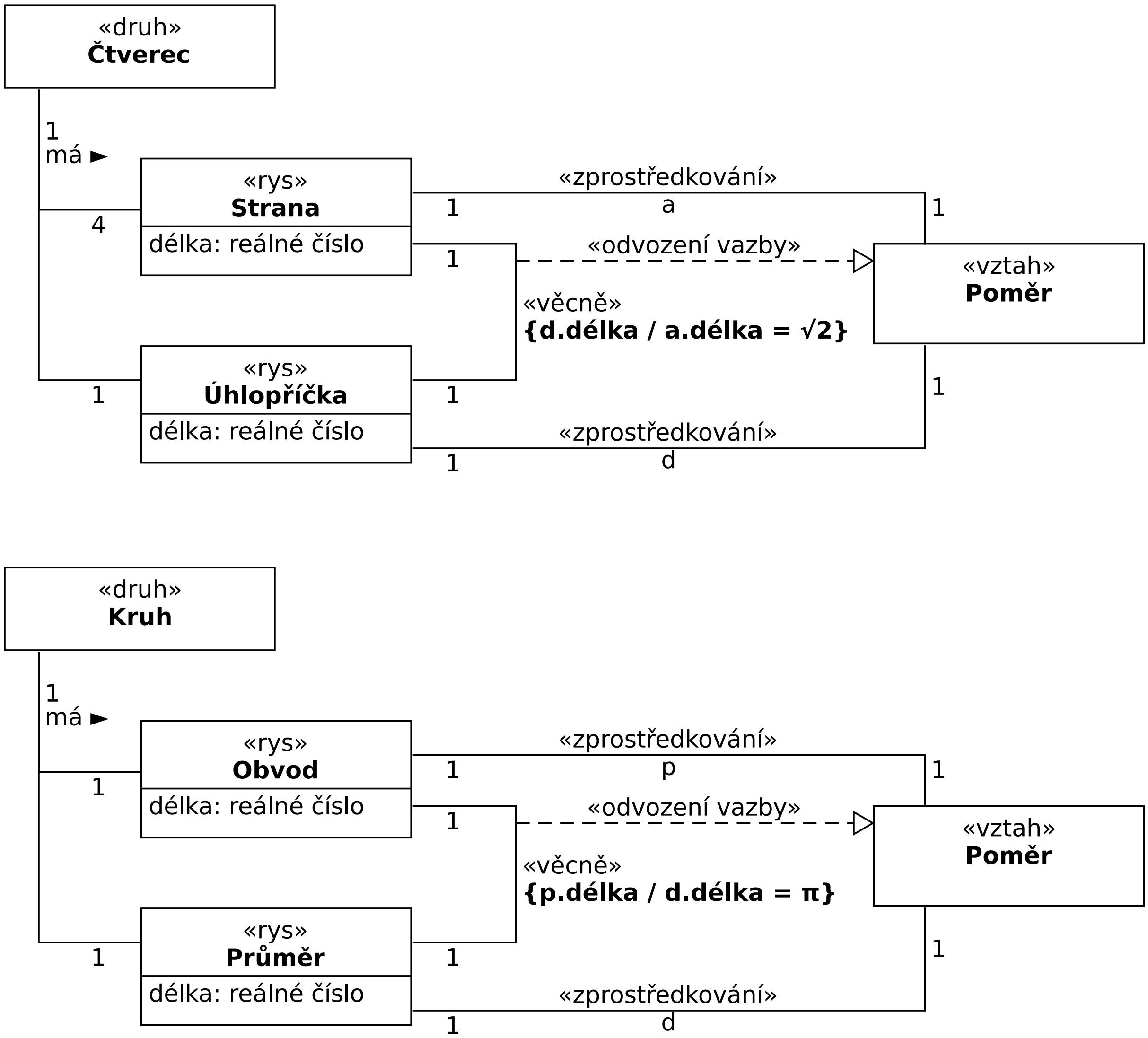
Obrázek 9: Hierarchie číselných oborů barevně a s ikonami



Obrázek 10: Racionální číslo jako poměr čísel celých



Obrázek 11: Mohutnosti množin



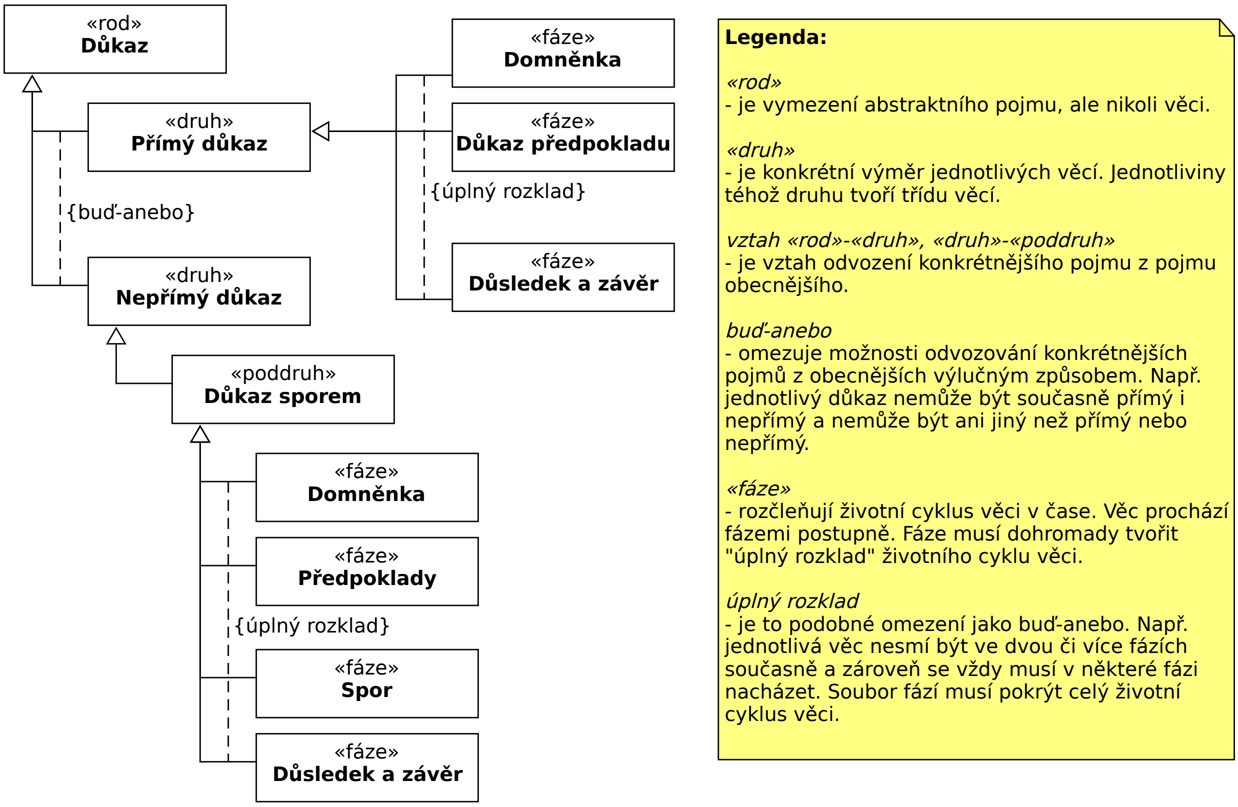
Legenda:

«druh»
- je konkrétní výměr jednotlivých věcí. Jednotliviny téhož druhu tvoří třídu věcí.

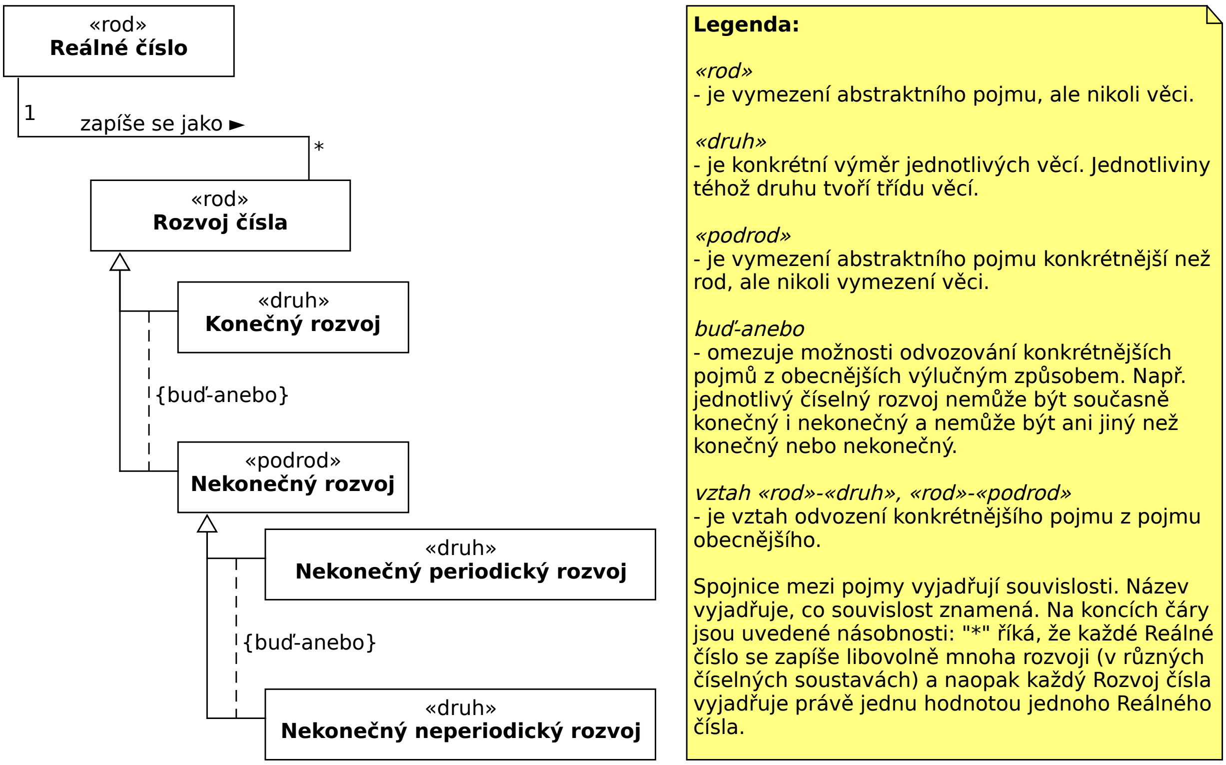
«rys»
- je trvalá vlastnost věci (např. kruhu), která tuto vlastnost má (např. každý kruh má průměr).

Spojnice mezi pojmy vyjadřují souvislosti. Druh souvislosti se vyjadřuje tzv. stereotypem v packách, např. «zprostředkování». Název uvedený pod stereotypem vyjadřuje, co souvislost konkrétně znamená. Na koncích čar jsou uvedené násobnosti, tj. např. každý Poměr zprostředkovává vztah jednoho Obvodu p a jednoho Průměru d a naopak každý vztah mezi každým Obvodem a Průměrem kruhu je zprostředkován právě jedním Poměrem. Čárkovaně je vyjádřena závislost věcné vazby na vztahu. Ve složených závorkách je uvedeno omezení, které musí ve vztahu vždy platit. Význam tohoto omezení je vyjádřen tučným písmem (to nevyžaduje norma).

Obrázek 12: Iracionální čísla definovaná na geometrických obrazcích



Obrázek 13: Základní druhy důkazů, fáze přímého důkazu a důkazu sporem



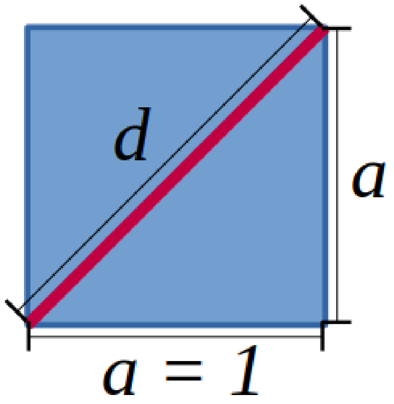
Obrázek 14: Zápisy čísel číselnými rozvoji

Vysvětlivky

Odvození odmocniny ze dvou

Použijeme Pythagorovu větu k vyjádření vztahu mezi délkami úhlopříčky a strany jednotkového čtverce:

$d^2 = a^2 + a^2$
$d^2 = 1^2 + 1^2$
$d^2 = 2$
$d = \sqrt{2}$



Obrázek 15: Úhlopříčka jednotkového čtverce

Co když strana čtverce *a* nebude jednotková? V tom případě využijeme příležitosti, abychom se pokusili vyjádřit $\sqrt{2}$ jako poměr celých čísel, jak se sluší na *racionální číslo*:

$d^2 = a^2 + a^2$ (obecně nemusí být $a = 1$)
$d^2 = 2a^2$
$d^2 / a^2 = 2$
$d / a = \sqrt{2}$

Po této úpravě je $\sqrt{2}$ vyjádřena jako poměr dvou čísel. Musí to být čísla kladná, protože jde o délku strany a úhlopříčky čtverce. Otázkou zůstává, zda mohou být celá kladná – tj. přirozená. **Má-li být $\sqrt{2}$ číslo racionální, musí se dát vyjádřit poměrem přirozených čísel *a* a *d*.** To znamená:

- Jestliže *a* a *d* mohou být čísla přirozená, je $\sqrt{2}$ racionální.
- Jestliže však není žádná taková dvojice přirozených čísel, je číslo $\sqrt{2}$ iracionální.

Brzy uvidíme, že pokus vyjádřit $\sqrt{2}$ jako poměr celých čísel skončí fiaskem (které matematici hrdě nazývají *důkaz sporem*).

Důkaz, že jsou čísla, která se nedají vyjádřit poměrem čísel celých

K vyvrácení Pythagorova učení o poměrech celých čísel je potřebný přesvědčivý *matematický důkaz*. Takových důkazů se dá najít celá řada[32] a zajímavé na nich je, že nebývají tzv. *přímé*[33]. Jak dokázat, že odmocnina ze dvou se dá vyjádřit poměrem dvou celých čísel, když celých čísel je nekonečně mnoho? Ještě těžší úkol by byl dokázat, že **každé číslo** se dá vyjádřit jako poměr celých čísel. V tomto případě se matematik uchýlí k nepřímému důkazu *sporem:* Vyjde z opačného předpokladu (totiž že původní domněnka neplatí). A pak se pokusí najít tzv. *kontrabajšpíl* (z německého *Kontrabeispiel*, **protipříklad**)[34], kterým dospěje ke *sporu* mezi původní domněnkou a *kontrabajšpílem* – a tím domněnku vyvrátí. V případě pythagorejského učení o poměrech celých čísel by důkaz sporem vypadal asi takhle:

32 Viz [9] a podrobněji vysvětlivka „Důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální číslo“
33 Přímý důkaz vychází z ověřeného pravdivého tvrzení, které je předpokladem domněnky. Z něj se postupně krok za krokem vyvozuje posloupnost odvozených tvrzení, která vedou přímou cestou k závěru, že zkoumaná domněnka platí (a tedy je pravdivá).
34 Děkuji kolegovi RNDr. Janíkovi Borotovi za uvedení do odborné terminologie.

- *Domněnka a předpoklad:* **Každé číslo se dá** vyjádřit jako poměr dvou čísel celých.
- *Negace:* **Je číslo, které se nedá** vyjádřit jako poměr dvou čísel celých.
- *Kontrabajšpíl a spor:* **Odmocnina ze dvou** je číslo, které se nedá vyjádřit jako poměr dvou čísel celých.[35] Kontrabajšpíl potvrzuje negaci domněnky, a proto je s domněnkou ve **sporu.**
- *Důsledek a závěr důkazu:* **Ne každé číslo se dá** vyjádřit jako poměr dvou čísel celých.

Pythagorejci zřejmě uměli vyvrátit domněnku sporem – a to nejen uvedenou domněnku o všech číslech, ale i tvrzení, že odmocnina ze dvou se nedá vyjádřit poměrem celých čísel. Všimněte si, jak užití *kontrabajšpílu* souvisí s kvantifikací (*je číslo…*) a s negací domněnky.

Důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální číslo

Několik důkazů, že odmocnina ze dvou nemůže být poměrem celých čísel, najdeme v článku [9]. Jednoduchý důkaz[36] začíná použitím Pythagorovy věty k vyjádření vztahu mezi délkami úhlopříčky a strany čtverce:

$d^2 = a^2 + a^2$
$d^2 = 2a^2$

Rozepišme rovnost s mocninami pro názornost podrobněji:

$d \cdot d = 2 \cdot a \cdot a$

Důkaz povedeme sporem:

- *Domněnka:* Číslo $\sqrt{2}$ je racionální.
- *Předpoklad:* Dejme tomu, že jak číslo a, tak číslo d mohou být přirozená čísla. Všimněte si, že předpoklad nedokazujeme pro všechna možná a a d, nýbrž stačí najít jednu takovou dvojici přirozených čísel, abychom dokázali předpoklad a tím i platnost domněnky. Problém je v tom, že dvojic přirozených čísel je nekonečně mnoho. Proto budeme uvažovat obecně:

Uvažme nyní, co by se stalo, kdybychom rozložili čísla a a d na prvočinitele.[37] Vzhledem k tomu, že se **na levé straně rovnosti** objevuje součin dvou proměnných d a podobně na pravé straně součin dvou proměnných a, musí se i každý prvočinitel objevit nejméně dvakrát, případně čtyřikrát, šestkrát atd. – **prostě v sudém počtu. Pravá strana** je ovšem navíc vynásobená prvočíslem 2, takže dvojka se tam objeví nejméně jednou, případně třikrát, pětkrát, sedmkrát atd. – v **lichém počtu.** A součin sudého a lichého počtu dvojek se nemůže rovnat. Na ostatních prvočinitelích nezáleží: i kdyby se ostatní prvočinitelé vlevo a vpravo shodovali, nemůžeme kvůli dvojkám dosáhnout rovnosti.[38]

- *Spor:* Tato úvaha vede ke sporu s předpokladem. Tím jsme vyvrátili předpoklad a potažmo i domněnku. Všimněte si, že v úvahu jsme brali všechna možná čísla a a d obecně.[39]

35 Viz vysvětlivka „Důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální číslo“
36 Názornější může být asi jeden z geometrických důkazů v [9], ale byl by přece jen o poznání komplikovanější.
37 Viz vysvětlivka „Příklad rozkladu přirozených čísel na prvočinitele“, kde je i příklad pro lepší pochopení.
38 Ani v případě, že by v rozkladu čísla d nebyla žádná dvojka, nedosáhneme rovnosti. Součin jakýchkoliv prvočísel, které neobsahují 2, nemůže být dvakrát větší než součin jiných prvočísel. *(Poznámka F. Douška – díky Františku!)*
39 To znamená, že najít jeden *kontrabajšpíl* by k vyvrácení předpokladu nestačilo.

- *Důsledek a závěr důkazu:* Není možné do rovnosti dosadit za *a* a *d* přirozená čísla, a proto **poměr *d* / *a* = √2 musí být iracionální.**

Všimněte si, že v tomto důkazu není použit *kontrabajšpíl*. Jak to souvisí s tím, že domněnka není negovaná?

Příklad rozkladu přirozených čísel na prvočinitele

Přirozené číslo vyjádříme jako součin prvočísel, jimiž je číslo beze zbytku dělitelné, např.:

$6 = 2 \cdot 3$

Prvočíslo je přirozené číslo, které se nedá beze zbytku dělit jiným přirozeným číslem než 1 nebo samo sebou.

Pro snazší pochopení důkazu, že Hippasovo číslo je iracionální, si ukažme rozklad čísel *a* a *d* na příkladu:

Příklad: pro $a = 123$ a $d = 456$ dostaneme rozklad:

$d = 456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$, $a = 123 = 3 \cdot 41$,

kde 2, 3, 19 a 41 jsou prvočísla. Po dosazení se ovšem z rovnosti $d \cdot d = 2 \cdot a \cdot a$ stane nerovnost:

$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19) \neq 2 \cdot (3 \cdot 41) \cdot (3 \cdot 41)$

Případně totéž stručněji a snad i přehledněji s umocňováním:

$(2^3 \cdot 3 \cdot 19) \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 19) \neq 2 \cdot (3 \cdot 41) \cdot (3 \cdot 41)$, tj.
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 19^2 \neq 2^1 \cdot 3^2 \cdot 41^2$
– všimněte si, že vlevo je dvojka umocněna sudým číslem 6, kdežto vpravo lichým číslem 1.

Podobně např. pro $a = 57$, když se prvočinitel 2 v součinu na levé straně vůbec neobjeví:

$(2^0 \cdot 3 \cdot 19) \cdot (2^0 \cdot 3 \cdot 19) \neq 2 \cdot (3 \cdot 41) \cdot (3 \cdot 41)$, kde $2^0 = 1$, tj.:
$(1 \cdot 3 \cdot 19) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 19) \neq 2 \cdot (3 \cdot 41) \cdot (3 \cdot 41)$

Ani při volbě jiných hodnot *a* a *d* nemůžeme dosáhnout rovnosti prostě proto, že na levé straně bude počet dvojek vždycky sudý (případně nulový), kdežto na pravé straně vždycky lichý.

Poziční číselné soustavy

Číselná soustava se nazývá **poziční,** když hodnota číslice závisí také na umístění (tj. pozici) číslice v čísle, např. číslice 1 má v čísle 321 hodnotu „jedna“, ale v čísle 123 má stejná číslice 1 hodnotu „sto“. Naproti tomu např. latinské chronogramy nejsou poziční – prostě jen sečítáme hodnoty číslic v nápisu. Např. nápis na kapli sv. Judy Tadeáše v Dobřichovicích: „aeDes sanCto thaDaeo apostoLo qVI oDIo habetVr gratIs eX Voto posIta“ obsahuje letopočet 500 + 100 + 500 + 50 + 5 + 1 + 500 + 1 + 5 + 1 +10 + 5 + 1 = 1679, kdy byla kaple postavena.

Základ soustavy říká, kolik různých číslic máme k dispozici, když chceme zapsat číslo. Jednociferná čísla mají hodnotu danou svojí jedinou číslicí – to je ve všech soustavách stejné. Rozdíl je v hodnotách vyšších řádů, např. v trojkové soustavě máme číslice 0, 1 a 2. Proto číslo tři nemůžememe zapsat jedinou číslicí 3, nýbrž dvojciferně jako 1 trojku a žádnou jednotku:

10 (3) = 3 (10),

kde číslo v závorce je základ soustavy zapsaný desítkově. Podobně číslo čtyři zapíšeme jako 1 trojku a 1 jednotku:

11 (3) = 3 + 1 (10) = 4 (10).

Jednotky zůstávají jednotkami ve všech soustavách. Takže čísla jedna až deset zapíšeme desítkově:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (10)

a např. 123 (10) = $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ (10)

sedmičkově:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13 (7)

a např. 123 (7) = $1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0$ (10) = 49 + 14 + 3 = 66 (10)

trojkově:

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101 (3)

a např. 210 (3) = $2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$ (10) = 18 + 3 + 0 = 21 (10)

dvojkově:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010 (2)

a např. 101 (2) = $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ (10) = 4 + 0 + 1 = 5 (10).

Periodické rozvoje racionálních čísel

Nekonečné rozvoje racionálních čísel jsou „periodické" – poslední číslice se opakují, např.:

22 / 7 = 3,142857 142857 142857…

Opakování označujeme nadtržením, např.:

- $1 / 3 = 0,\overline{3}$
- $22 / 7 = 3,\overline{142857}$

Souvisí to i s tím, že racionální čísla, která jsou v desítkové soustavě periodická, můžeme vždy zapsat v příslušné číselné soustavě konečným počtem číslic a bez periodického opakování, např.:

- 1 / 3 = 0,1 (3)
  Čteme: „žádná celá a jedna třetina v trojkové soustavě" – prostě místo desetin, setin a tisícin píšeme za řádovou čárkou třetiny, devítiny, sedmadvacetiny atd.

Podobně:

- 22 / 7 (10) = $(3 \cdot 7 + 1) / 7$ (10) = 3,1 (7)
  (sedmičkově: tři celé a jedna sedmina).

Jiný způsob, jak ověřit, že číslo je racionální, nabízí Lukáš Havrlant v [25] v kapitolce „Převod periodického čísla na zlomek".[40]

40 viz https://www.matweb.cz/racionalni-cisla/

Výpočet iracionálního čísla řadou

Často se podaří vyjádřit iracionální číslo jako funkční hodnotu nějakého známého argumentu, např. Eulerovo číslo e jako hodnotu funkce e^x pro argument $x = 1$, tj.
$e = e^1$
A pro některé funkce (např. právě pro e^x) se dají v určitém rozsahu argumentů najít nekonečné řady: dosadíme vhodnou hodnotu za argument a čím více členů řady posčítáme, tím přesnější hodnotu hledaného čísla získáme, viz [17] a [18].

Výhoda řad spočívá v tom, že zatímco některé jiné funkce se obtížně počítají, řady stačí posčítat, což není nic složitého, zato pracné to bývá velice. Problém je, že řady, které sčítáme, jsou nekonečné a že bychom tedy měli sčítat donekonečna. K praktickým účelům však stačí posčítat řadu jen tak daleko, abychom dosáhli potřebné přesnosti a zbytek se prostě zanedbá (ale i tak to může být problém, když se řada přibližuje k řešení pomalu – viz příklady v pomůckách). Najít řady, které rychle dosáhnou požadované přesnosti, bývá zapeklitý úkol i pro profesionální matematiky, ale daří se to. Takové vypulírované perly mezi řadami se pak používají v implementacích programovacích jazyků k rychlému výpočtu standardních funkcí, jako je sinus, logaritmus, odmocniny apod. Příklady několika základních (neoptimalizovaných a tedy výpočetně náročných) řad však dokáže naprogramovat i matematický laik nebo začátečník. Je to docela hezké programátorské cvičení a výsledkem je názorná pomůcka, s jejíž pomocí neprogramátor pochopí, jak se dají počítat reálné funkce nebo iracionální čísla řadou:

Např. pro výpočet čísla e je známá řada:

$e = 1 + 1 + (1/2) + (1/2/3) + (1/2/3/4)\ldots$

Podobně pro výpočet Ludolphova čísla π:

$\pi = 4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7\ldots)$

nebo takhle:

$\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7\ldots$

Hippasovo číslo $\sqrt{2}$ se dá spočítat podle [9] takhle:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\ldots$$

K výpočtům těchto tří řad můžete použít názorné pomůcky na webových stránkách:

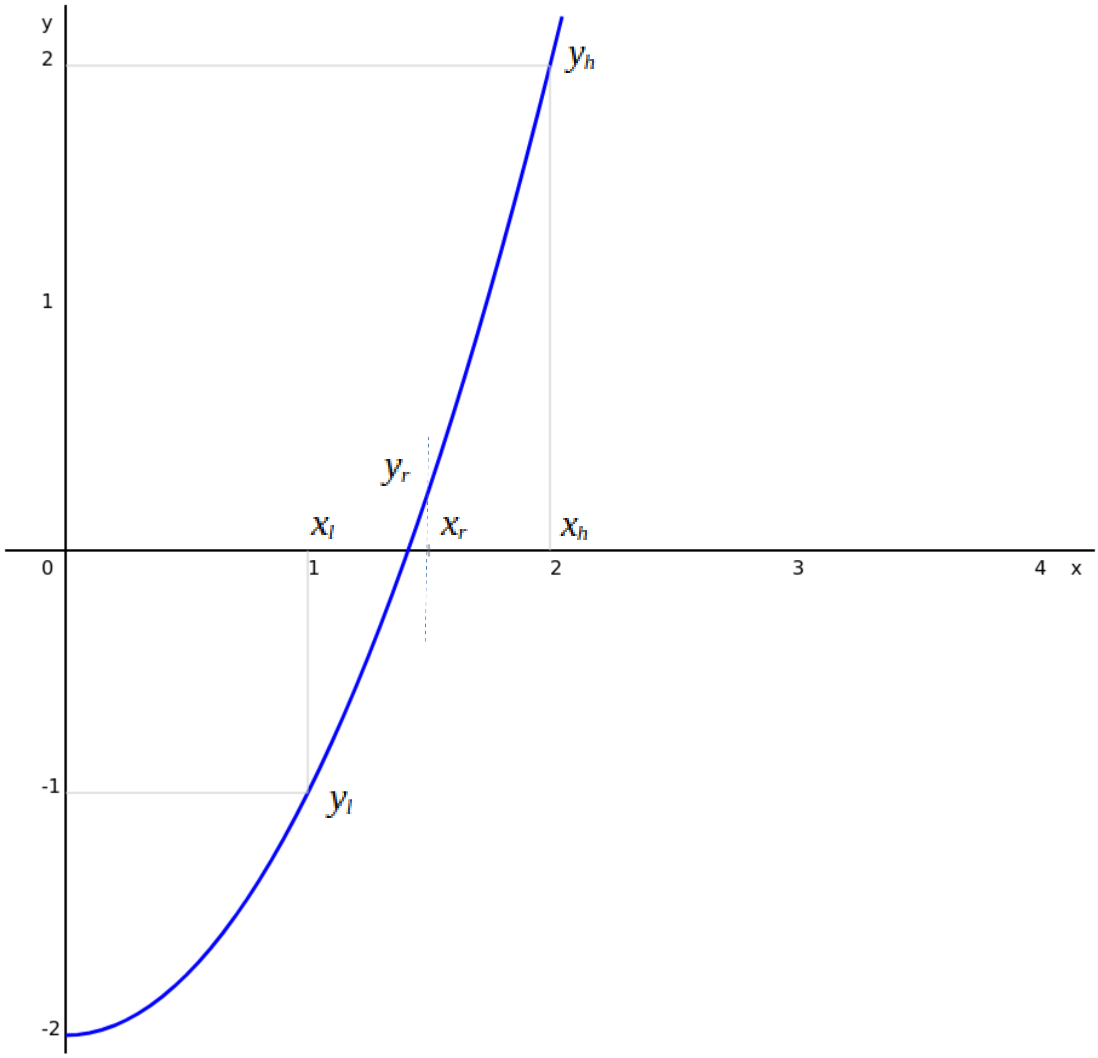
- EulerovoCislo.html
- HippasovoCislo.html
- LudolphovoCislo.html

Výpočet iracionálního čísla bisekcí (půlením intervalu)

Postup si vysvětlíme na výpočtu Hippasova čísla. Jak na to?

- Rovnici $x^2 = 2$ převedeme do tvaru $x^2 - 2 = 0$. Řešení pak najdeme přímo na průsečíku osy x s grafem funkce $f(x) = x^2 - 2$. Obrázek je názornější než text, navíc poslouží k dost přesnému odhadu intervalu, ve kterém najdeme řešení, a také výpočet bude jednodušší.

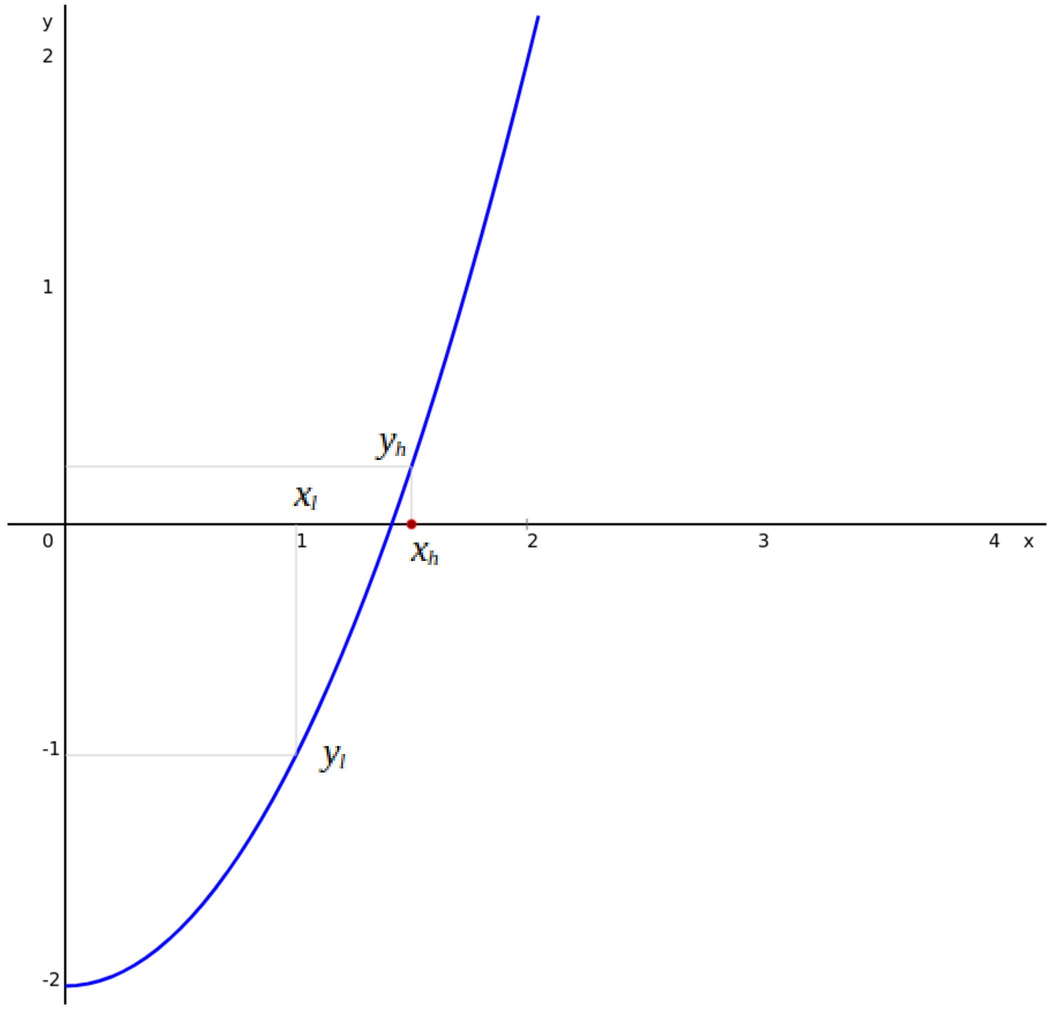
- Důležité je, aby funkce $f(x) = x^2 - 2$ ve zvoleném intervalu buď stále rostla, nebo naopak stále klesala – a přitom aby graf funkce proťal osu x (viz obrázek). Jinak se může stát, že postup výpočtu nepovede k výsledku.
- Především musíme odhadnout interval, ve kterém leží x. Za dolní mez můžeme zvolit číslo 1, protože víme, že $1^2 - 2 = -1 < 0$. Za horní mez pak třeba číslo 2, protože $2^2 - 2 = +2 > 0$. Zvolený interval $1 \leq x \leq 2$ zaručuje, že výpočet povede k výsledku. S pomocí grafu bychom mohli odhadnout těsnější interval (dolní a horní mez blíž k řešení), ale takhle nám vyjde čitelnější obrázek.



Obrázek 16: Hledání odmocniny bisekcí, výchozí stav

- Vyjmenujme proměnné potřebné k výpočtu:
  - x_l – dolní mez intervalu, kde hledáme řešení
  - x_h – horní mez intervalu, kde hledáme řešení
  - y_l – hodnota $f(x_l)$
  - y_h – hodnota $f(x_h)$
  - x_r – aktuální hodnota přibližného výsledku (zpřesňuje se s každým krokem výpočtu)
  - y_r – hodnota $f(x_r)$

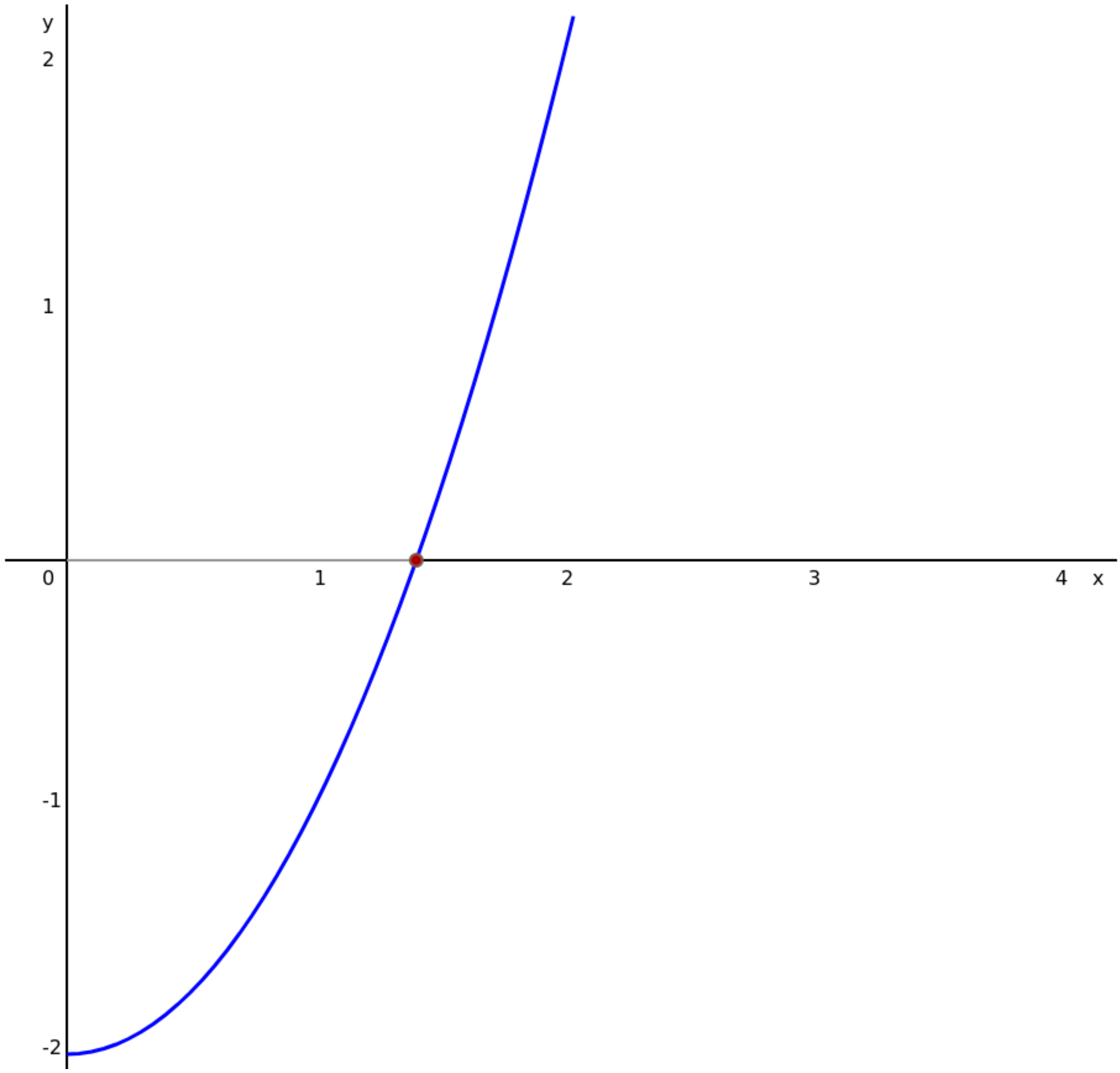
- Postoupíme ve výpočtu o jeden krok:
  - $x_r = \frac{x_l + x_h}{2}$ – tj. vypočteme novou hodnotu x_r uprostřed mezi x_l a x_h.
  - Jestliže $(y_r < 0) \Leftrightarrow (y_l < 0)$ – tj. jestliže buď $y_r < 0$ a zároveň také $y_l < 0$, anebo $y_r \geq 0$ a zároveň také $y_l \geq 0$:
    - tak nastavíme $x_l = x_r$ a $y_l = y_r$, kde $y_r = f(x_r)$
(tj. je-li buď y_r menší než hledané řešení a funkce roste, nebo není-li y_r menší než hledané řešení a funkce klesá, posuneme **dolní mez** odhadu x_l blíž k řešení)
    - jinak nastavíme $x_h = x_r$ a $y_h = y_r$
(tj. není-li buď y_r menší než hledané řešení a funkce roste, nebo je-li y_r menší než hledané řešení a funkce klesá, posuneme **horní mez** odhadu blíž k řešení)



Obrázek 17: Po prvním kroku výpočtu se nová hodnota horní meze intervalu přiblížila k řešení rovnice. Dolní mez intervalu se nezměnila.

- Opakujeme kroky výpočtu. S každým krokem se vypočtená hodnota *x* přibližuje k řešení a příslušná hodnota *f(x)* se přibližuje k nule – v grafu vidíme, jak se interval každým krokem zužuje stále těsněji k průsečíku osy *x* s grafem funkce *f(x)*.

- Výpočet ukončíme, buď když dosáhneme požadované přesnosti řešení, nebo když se vypočtená hodnota přestane měnit (tj. když to počítač prostě už neumí spočítat přesněji).



Obrázek 18: V dalších krocích dospějeme až k hodnotě x_r, která se přiblíží k řešení s požadovanou přesností.

Příslušný program v javascriptu pak může vypadat např. takto:

```
function f(x) {return x*x-2;} /* x²-2 = 0 v intervalu 1..2 */
var xl=1, xh=2, yl=f(xl), yh=f(xh), xr, yr;
function iterate() {
    xr = (xl + xh) / 2;
    yr = f(xr); // funkční hodnota v bodě x = r
    if ((yr < 0) == (yl < 0)) {
        xl=xr; yl=yr;
    } else {
        xh=xr; yh=yr;
    } //-if
    return xr;
} //-iterate
```

Funkci *iterate ()* spouštím tlačítkem z webové stránky,[41] takže pokračování a ukončení výpočtu ponechávám na uživateli.

Bisekce je jednoduchá, názorná a obecná metoda řešení rovnic, pokud

- rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru $f(x) = 0$
- dokážeme správně odhadnout interval proměnné *x*, ve kterém se nachází jedno hledané řešení
- a pokud *f(x)* všude v tomto intervalu buď roste, nebo klesá.

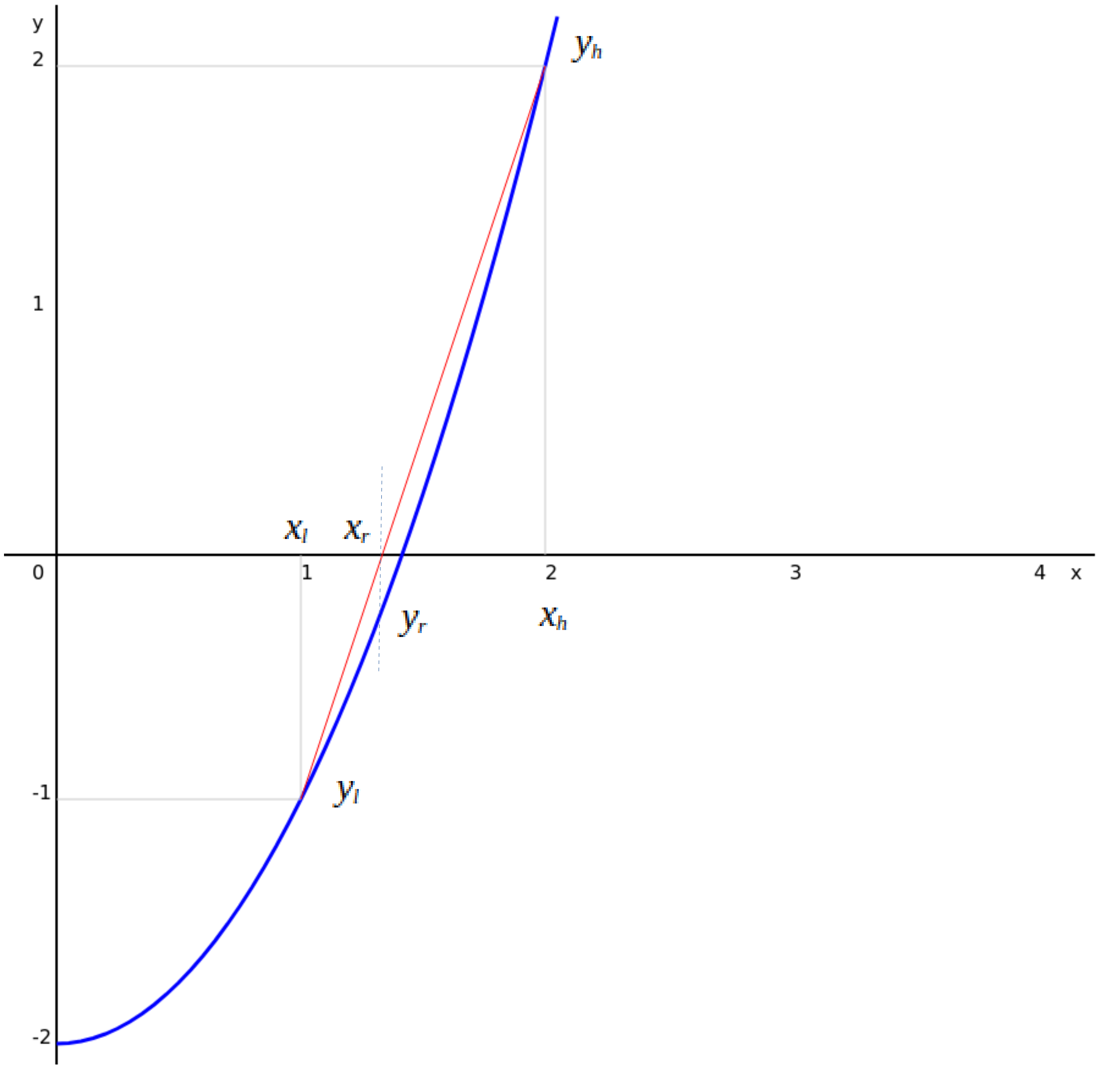
Tyto podmínky platí i pro metodu sečen (to je efektivnější, ale složitější metoda řešení rovnic).

Výpočet iracionálního čísla metodou sečen

Postup si vysvětlíme opět na výpočtu Hippasova čísla. Jak na to?

- Rovnici $x^2 = 2$ převedeme do tvaru $x^2 - 2 = 0$. Řešení pak najdeme přímo na průsečíku osy *x* s grafem funkce $f(x) = x^2 - 2$. Obrázek je názornější než text, navíc poslouží k dost přesnému odhadu intervalu, ve kterém najdeme řešení, a také výpočet bude jednodušší.
- Důležité je, aby funkce $f(x) = x^2 - 2$ ve zvoleném intervalu buď stále rostla, nebo naopak stále klesala – a přitom aby graf funkce proťal osu *x* (viz obrázek). Jinak se může stát, že postup výpočtu nepovede k výsledku.
- Především musíme odhadnout interval, ve kterém leží *x*. Za dolní mez můžeme zvolit číslo 1, protože víme, že $1^2 - 2 = -1 < 0$. Za horní mez pak třeba číslo 2, protože $2^2 - 2 = +2 > 0$. Zvolený interval $1 \le x \le 2$ zaručuje, že výpočet povede k výsledku. S pomocí grafu bychom mohli odhadnout těsnější interval (dolní a horní mez blíž k řešení), ale takhle nám vyjde čitelnější obrázek.

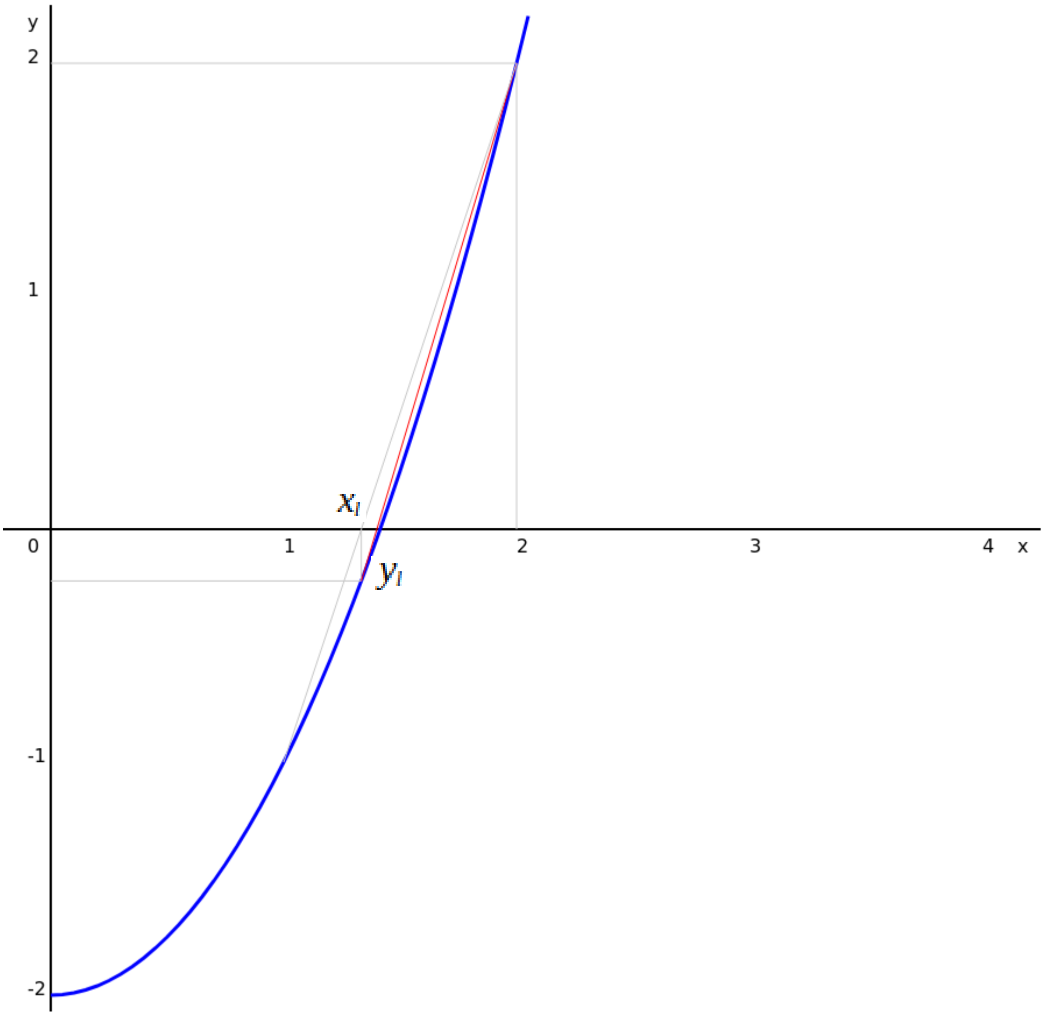
41 Viz Bisekce.html



Obrázek 19: Hledání odmocniny metodou sečen, výchozí stav

- Vyjmenujme proměnné potřebné k výpočtu:
  - x_l – dolní mez intervalu, kde hledáme řešení
  - x_h – horní mez intervalu, kde hledáme řešení
  - y_l – hodnota $f(x_l)$
  - y_h – hodnota $f(x_h)$
  - x_r – aktuální hodnota přibližného výsledku (zpřesňuje se s každým krokem výpočtu)
  - y_r – hodnota $f(x_r)$

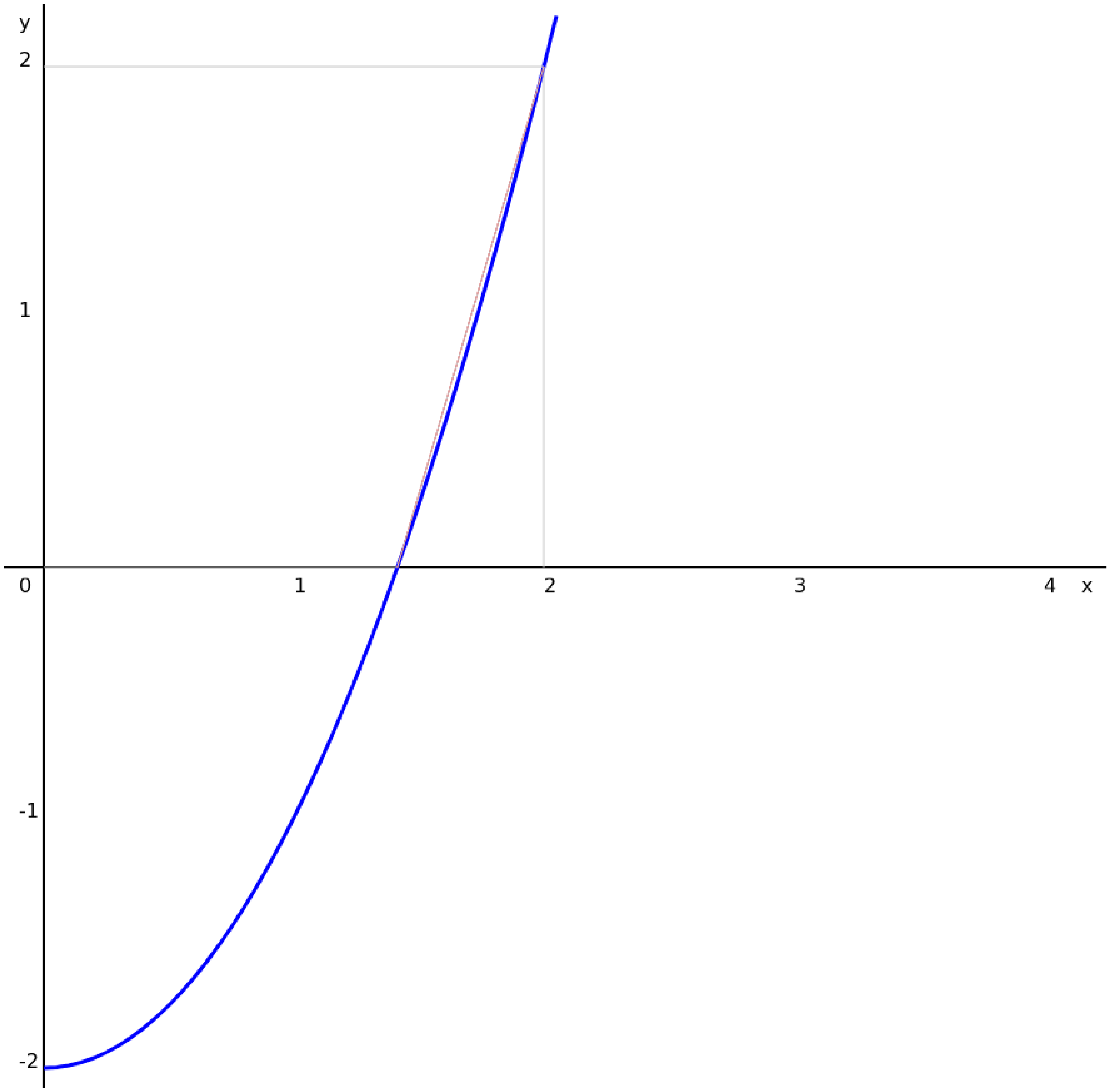
- Postoupíme ve výpočtu o jeden krok:
  - $x_r = \frac{y_h \cdot x_l - y_l \cdot x_h}{y_h - y_l}$ – tj. na základě podobnosti trojúhelníků x_r-x_h-y_h a x_r-x_l-y_l (viz „Obrázek 19“, „Obrázek 20“) vypočteme[42] novou hodnotu x_r
  - Jestliže $(y_r < 0) \Leftrightarrow (y_l < 0)$ – tj. jestliže buď $y_r < 0$ a zároveň také $y_l < 0$, anebo $y_r \geq 0$ a zároveň také $y_l \geq 0$:
    - tak nastavíme $x_l = x_r$ a $y_l = y_r$, kde $y_r = f(x_r)$
      (tj. je-li buď y_r menší než hledané řešení a funkce roste, nebo není-li y_r menší než hledané řešení a funkce klesá, posuneme **dolní mez** odhadu x_l blíž k řešení)
    - jinak nastavíme $x_h = x_r$ a $y_h = y_r$
      (tj. není-li buď y_r menší než hledané řešení a funkce roste, nebo je-li y_r menší než hledané řešení a funkce klesá, posuneme **horní mez** odhadu blíž k řešení)



Obrázek 20: Po prvním kroku výpočtu je původní sečna šedivá a nová červená sečna se přiblížila k řešení rovnice. Dolní mez intervalu se posunula v ose x doprava a příslušná funkční hodnota y se přiblížila vzhůru k nule.

42 Celé odovození je podrobně uvedeno ve vysvětlivce „Odvození kroku výpočtu rovnice metodou sečen“

- Opakujeme kroky výpočtu. S každým krokem se vypočtená hodnota *x* přibližuje k řešení a příslušná hodnota *f(x)* se přibližuje k nule – v grafu vidíme, jak se interval každým krokem zužuje stále těsněji k průsečíku osy *x* s grafem funkce *f(x)*.
- Výpočet ukončíme, buď když dosáhneme požadované přesnosti řešení, nebo když se vypočtená hodnota přestane měnit (tj. když to počítač prostě už neumí spočítat přesněji).



Obrázek 21: V dalších krocích dospějeme až k sečně, která se přiblíží k řešení s požadovanou přesností

Příslušný program v javascriptu pak může vypadat např. takto:

```
function f(x) {return x*x-2;} /* x²-2 = 0 v intervalu 1..2 */
var xl=1, xh=2, yl=f(xl), yh=f(xh), xr, yr;
function iterate() {
    xr = (yh * xl - yl * xh) / (yh-yl);
    yr = f(xr);
    if ((yr < 0) == (yl < 0)) {
        xl=xr;
        yl=yr;
    } else {
        xh=xr;
        yh=yr;
    } //-if
    return xr;
} //-iterate
```

Funkci *iterate ()* spouštím tlačítkem z webové stránky,[43] takže pokračování a ukončení výpočtu ponechávám na uživateli.

Metoda sečen neslouží jen k výpočtu odmocniny. Je to poměrně efektivní a obecná metoda vhodná k řešení rovnic, pokud

- rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru $f(x) = 0$
- dokážeme správně odhadnout interval proměnné x, ve kterém se nachází jedno hledané řešení
- a pokud *f(x)* všude v tomto intervalu buď roste, nebo klesá.

Stejné podmínky je potřeba dodržet i při bisekci (to je jednodušší, názornější, ale méně efektivní metoda řešení rovnic).

Odvození kroku výpočtu rovnice metodou sečen

O jeden krok výpočtu postoupíme takto:

$$x_r = \frac{y_h \cdot x_l - y_l \cdot x_h}{y_h - y_l}$$

Vyjdeme z podobnosti trojúhelníků na obrázcích Obrázek 19, Obrázek 20:

- $\frac{x_h - x_r}{y_h} = \frac{x_r - x_l}{-y_l}$

Z toho postupně odvodíme:

- $\frac{x_h - x_r}{y_h} = \frac{x_l - x_r}{y_l}$

43 Viz MetodaSecen.html

- $\frac{x_h}{y_h} - \frac{x_r}{y_h} = \frac{x_l}{y_l} - \frac{x_r}{y_l}$
- $\frac{x_r}{y_l} - \frac{x_r}{y_h} = \frac{x_l}{y_l} - \frac{x_h}{y_h}$
- $\frac{x_r \cdot y_h}{y_l \cdot y_h} - \frac{x_r \cdot y_l}{y_l \cdot y_h} = \frac{x_l \cdot y_h - x_h \cdot y_l}{y_l \cdot y_h}$
- $\frac{x_r \cdot (y_h - y_l)}{y_h \cdot y_l} = \frac{x_l \cdot y_h - x_h \cdot y_l}{y_l \cdot y_h}$
- $x_r \cdot (y_h - y_l) = x_l \cdot y_h - y_h \cdot y_l$ a konečně:
- $x_r = \frac{y_h \cdot x_l - y_l \cdot x_h}{y_h - y_l}$

Toto odvození je v rozfázované (a snad i názornější) podobě uvedeno v prezentaci na adrese RealnaCisla_4.pdf

Definice množiny přirozených čísel

Definice množiny přirozených čísel může vypadat např. takhle:

Množina přirozených čísel ℕ je definována dvěma operacemi, kterými vznikají jednotlivá čísla, tj. prvky množiny:

- **0** – je operace bez parametrů, představuje sama sebe a je to tedy konstanta nula.
- **následovník (*x*)** – je operace s jedním parametrem a definuje ostatní přirozená čísla.

Pro jednoduchost můžeme výsledky operace „následovník“ pojmenovat 1, 2 atd.:

- následovník (0) = 1
- následovník (následovník (0)) = následovník (1) = 2
- atd.

Tímto způsobem jsme nadefinovali celou množinu přirozených čísel včetně nuly.

Podivné vlastnosti nekonečen

Jedna z podivných a na první pohled i zdánlivě paradoxních vlastností jak hustého uspořádání racionálních čísel v intervalu, tak i bodů na úsečce je:

- Roztáhneme-li úsečku do nekonečna, uspořádání bodů se tím nezředí. Polopřímka a případně i přímka bude zaplněna stále stejně hustě jako původní úsečka.
- Roztáhneme-li racionální interval do nekonečna, ani uspořádání čísel se nezředí, nýbrž bude stále stejně husté.

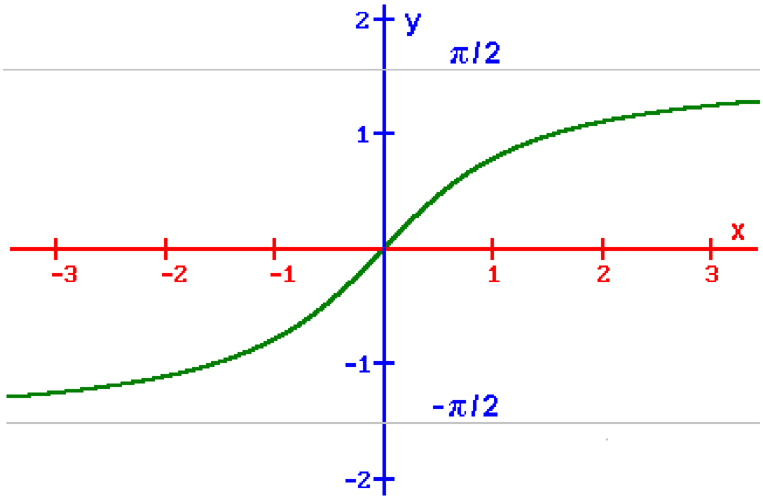
Názorným příkladem může být interval (0; 1> v oboru racionálních čísel. Převrácením hodnot čísel z tohoto intervalu vznikne interval <1; ∞). Kdybychom začali počítat převrácené hodnoty po desetinách, dostali bychom posloupnost

10/10, 10/9, 10/8, 10/7, 10/6, 10/5, 10/4, 10/3, 10/2, 10/1

– a tuto posloupnost bychom pak donekonečna zahušťovali (třeba jako krupicovou kaši nekonečným vařením na tvrdo až na šutr).

Nedostatkem uvedeného příkladu je, že se interval neroztáhl na celý obor racionálních čísel, nýbrž jen na čísla kladná od +1 výš. Všichni asi tušíme, že přidáním čísel menších než 1 se mohutnost intervalu nezmění[44]. Přesvědčivější by bylo použít funkci tangens[45] na zobrazení reálného intervalu (–π/2; +π/2) na číselnou osu[46] s tím, že co platí pro čísla reálná, musí platit stejně dobře i pro čísla racionální.

Funkce tangens funguje tam i zpátky – zpátky se jedná o *inverzní funkci* arkus tangens. Funkce arkus tangens zobrazí celou číselnou osu na interval (–π/2; +π/2), takže jeden každý bod na ose *x* má svůj jeden obraz v intervalu na ose *y* – viz graf na obrázku 22. Vypadá to absurdně, zvlášť když si uvědomíme, že takových intervalů na ose *y* je také nekonečně mnoho. Zkrátka: není nekonečno jako nekonečno a nekonečna nemůžeme porovnávat stejným způsobem, jak porovnáváme celá nebo reálná čísla, viz [5].



Obrázek 22: Graf funkce arkus tangens, viz http://84.242.77.122/_uc%282ebnice_CS/Matematicka_analyza/Funkce/Elementarni_funkce/Goniometricke_funkce/atg.GIF

Jak naprogramovat vyjmenovávání reálných čísel

Protože je reálných čísel mnohem víc než čísel racionálních, asi nikoho nepřekvapí, že stejně jako čísla racionální se nedají vyjmenovat podle návodu konečným počtem kroků. Vyjmenovávání racionálních čísel se dá naprogramovat, program poběží, ale neskončí a nedospěje k výsledku. Podobně i vyjmenovávání čísel reálných se dá naprogramovat na počítači nebo spíš v síti počítačů[47]). Množinu všech reálných čísel tedy můžeme konstruovat třeba takhle:

44 …což je další zdánlivě paradoxní podivná vlastnost nekonečen (setkali jsme se s ní už při číslování celých čísel čísly přirozenými)…

45 Viz graf na obrázku např. ve Wikipedii https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangent_one_period.svg

46 Meze intervalu jsem vyjádřil v obloukové míře (která vyjadřuje úhel poměrem délky kruhového oblouku k poloměru kružnice – víme, že celá kružnice je 2π-násobkem poloměru, takže oblouk délky 2πr opíše úhel 2π = 360°. Podobně π = 180°, π / 2 = 90° atd.)

47 **Pozor:** Výpočetní postup, který naznačím, rozhodně **nepatří mezi algoritmy** už proto, že jednak nekončí a jednak pořadí kroků výpočtu nebude jednoznačně určeno. Spíš si představme, že poběží souběžně čím dál víc paralelních větví výpočtu.

- Budeme vyjmenovávat všechna reálná čísla v intervalu (0; 1) postupně i souběžně ve všech dílčích intervalech, ke kterým dospějeme, a to takto:
  - Čísla budeme vyjmenovávat ve dvojkové soustavě – postup se tím zjednoduší.
  - Spustíme souběžný proces, který bude stejným způsobem vyjmenovávat spodní polovinu intervalu, např. (0; 0,1) (2). Poloviční interval kupodivu obsahuje stále stejně nespočetně nekonečné množství reálných čísel, ale to nám vůbec nevadí.
  - Spustíme souběžný proces, který bude stejným způsobem vyjmenovávat svrchní polovinu intervalu, např. (0,1; 1) (2).
  - Vyjmenujeme číslo, které se nachází uprostřed intervalu, např. 0,1 (2) – toto číslo zařadíme k dalšímu zpracování mezi výsledky, ke kterým jsme dospěli.
- Každé číslo x z intervalu (0; 1), ke kterému výpočet dospěje, promítneme na reálnou osu vzájemně jednoznačným zobrazením: tg $((x - 1 / 2) \cdot \pi)$
  - Odečtením $x - 1 / 2$ posuneme x z intervalu (0; 1) do intervalu (–1 / 2; +1 / 2).
  - Vynásobením číslem π se interval (–1 / 2; +1 / 2) zobrazí („roztáhne“) na (–π / 2; +π / 2). Vzhledem k tomu, že číslo π je iracionální s nekonečným rozvojem v každé poziční číselné soustavě s přirozeným základem, bude násobení nekonečný proces.[48] Ale to nám nevadí, procesorů i času máme dost.
  - Funkcí tangens se interval[49] (–π / 2; +π / 2) zobrazí na celou reálnou osu.[50] Nevynecháme žádné reálné číslo, ke kterému výpočet dospěje. A výpočet dospěje ke každému číslu, byť nekonečným počtem kroků, protože času i souběžně pracujících procesorů máme víc než libovolně moc.[51]
- Lavina souběžných procesů způsobí, že se do dvojkových rozvojů budou na každou další dosaženou pozici připisovat další a další nuly a jedničky.[52] Jak se lavina procesů bude valit (a šířit), tak se dvojkové rozvoje budou stále více prodlužovat. Tento postup nejenže nekončí, ale lavinovitě spouští další a další souběžné procesy. Každý dosažený výsledek se násobí číslem π, takže i vyhodnocení a případné vypisování každého výsledku na monitor poběží donekonečna souběžně s ostatními procesy. Počítače zapojené do výpočtu se zahlcují nekonečnými procesy, monitory už dávno nestačí na vypisování výsledků, veškerá výpočetní technika v libovolně rozlehlé síti je přetížena úplně zbytečným vyjmenováváním reálných čísel, protože **práce stejně vůbec neubývá** – stále zbývá vyjmenovat nespočetně nekonečné množství dosud stále ještě nevyjmenovaných reálných čísel…

Naprogramovat se to dá, ale spustit takový program bych rozhodně nezkoušel (jednou jsem to už zkusil v omezeném rozsahu a slibuju, že to víckrát neudělám).

48 Výpočetní zátěž způsobená násobením π však není podstatná, protože už samotná mohutnost intervalu (0; 1) je stejná jako mohutost množiny reálných čísel ℝ – tj. nekonečná nespočetná.
49 Úhly vyjadřuji v obloukové míře, podrobněji viz vysvětlivka „Podivné vlastnosti nekonečen“, pozn. 46
50 Viz graf na obrázku např. ve Wikipedii https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangent_one_period.svg
51 POZOR, známá finta! Mluvím-li *o nekonečném počtu;* zdá se, že nekonečno je číslo jako každé jiné…
52 Na aritmetiku v pohyblivé řádové čárce si musíme naprogramovat svoje vlastní funkce, které budou počítat s přesností na libovolný počet platných číslic podle potřeby.

Von Neumannův vesmír

Jestliže všechny předměty, kterými se matematika zabývá, jsou množiny, můžeme se pokusit je zkonstruovat z prázdné množiny postupně (jako množiny všech dosud zkonstruovaných podmnožin) třeba takhle, viz [24]:

- V_0 = {} – začneme prázdnou množinou.
- V_1 = {{}} – prázdná množina poslouží jako prvek první množiny jednoprvkové.
- V_2 = {{},{{}}} – jakmile rozlišíme dvě různé množiny, zkonstruujeme dvouprvkovou množinu.
- V_3 = {{},{{}},{{{}}},{{},{{}}}} – další množina, kterou můžeme zkontruovat, obsahuje čtyři prvky.
- V_4 = {{}, {{}}, {{{}}}, {{},{{}}}, {{{{}}}}, {{},{{{}}}}, {{{}},{{{}}}}, {{}, {{}}, {{{}}}}, {{{},{{}}}}, {{},{{},{{}}}}, {{{}},{{},{{}}}}, {{},{{}},{{},{{}}}}, {{{{}}}, {{},{{}}}}, {{},{{{}}},{{},{{}}}}, {{{}},{{{}}},{{},{{}}}}, {{},{{}},{{{}}},{{}, {{}}}}} – šestnáct prvků
- V_5 obsahuje 2^{16} = 65536 prvků, V_6 obsahuje 2^{65536} prvků, což je počet, který významně překračuje počet atomů ve známém vesmíru. Podobně pak z dosud zkonstruovaných množin konstruujeme množiny další a další – množiny se množí, že i králíci by se divili.
- V_ω má mohutnost množiny přirozených čísel a $V_{\omega+1}$ má mohutnost množiny reálných čísel. To je mohutnost nespočetně nekonečná.

Tato konstrukce se správně česky nazývá **„Fundované jádro“.** Do nadpisu jsem však raději zvolil otrocký překlad z angličtiny, protože jednak po zásluze odkazuje na Jánose (Johna) von Neumanna, který se zapsal nejen do historie matematiky v oblasti teorie množin, ale také do oboru, který přesahuje z matematiky do konstrukce počítačů a do programování. Kromě toho „von Neumannův vesmír“ vypadá trochu tajemně a podněcuje nás k přemýšlení a hlubšímu studiu.

Jestli vám uvedený postup něco připomíná, tak jste na správné stopě. Ten postup se totiž v něčem podobá vyjmenovávání reálných čísel.[53] Souvisí to i s tím, že je množina $V_{\omega+1}$ nespočetná. Z toho plyne, že tak jako reálná čísla, ani „universum“ všech množin není přetržité, ale tvoří kontinuum.

Božena Payerová

Moje babička Payerová se narodila 23. srpna 1903 v Radobytcích a „definitivně nás předešla“ 2. ledna 1998 v Praze. Jako tzv. *privatistka* vystudovala chlapecké *c.k. nižší a vyšší gymnázium v Písku* a potom přírodovědeckou fakultu Karlovy university. *Českou vědeckou zkušební komisí* pak byla shledána způsobilou (tj. byla aprobována) vyučovat matematiku a fyziku na středních školách Republiky československé od Aše až po Jasiňu a oprávněna honosit se titulem profesorky.

Pokud si správně vzpomínám, uměl jsem sotva číst a psát, když mi vyprávěla o starých Egypťanech, kteří znali podivný poměr perimetru a diametru kruhu, o Řecích, kteří narazili na další

53 Viz vysvětlivka „Jak naprogramovat vyjmenovávání reálných čísel“

podivný poměr úhlopříčky a strany čtverce, a tak to pokračovalo dál až k poměrům délek strun a k hudební akustice. Bylo toho mnohem víc, o čem mi povídala, vždycky když jsem dorostl, abych pochopil. Podstatné je, že když se mě nedávno jedna známá ptala na rozdíl mezi racionálními a reálnými čísly, okamžitě se mi vybavilo babiččino vyprávění staré už skoro šedesát let – a to jsem použil i v tomto článku. Díky, babi!

Ivan Ryant

O mně se dozvíte všechno podstatné na mých webových stránkách https://sites.google.com/view/ivanryant/%C4%8Desky

Návod k použití aneb metodická poznámka

Kromě textu, který právě čtete, jsou součástí tohoto studijního materiálu také přiložené prezentace a pomůcky v podobě interaktivních webových stránek, na které z tohoto textu vedou odkazy. Celkově je tento studijní materiál členěn takto:

- Příběh „Jak se liší reálná čísla od racionálních“ (forma psaná i zvuková)
- Diagramy pojmů a souvislostí
- Vysvětlivky
- Tento návod
- Prezentace
- Názorné pomůcky

Studijní materiál je určen všem zájemcům, kteří chtějí porozumět reálným číslům jako pojmu, a to na úrovni přibližně od 8. třídy základní školy výš. Dbal jsem na to, aby materiál nevyžadoval víc znalostí, než mají žáci asi tak sedmé třídy ZŠ – vše ostatní je vysvětleno ve vysvětlivkách a předvedeno názornými pomůckami. Druhou cílovou skupinou jsou učitelé, kterým materiál nabízím k použití ve výuce – hlavně na ty se obracím v této kapitole. Učitel nemusí text článku ve výuce vůbec použít, všechno důležité může ukázat v přiložených prezentacích nebo na pomůckách.

Při práci s tímto materiálem berte prosím v úvahu, že nejsem matematik, ale učitel, softwarový inženýr a programátor. Z matematiky pochopím to, co si dokážu naprogramovat. Nedůvěřuji axiomům a matematické myšlení mi není vlastní. Přesto se snažím matematiky pochopit a jejich způsobu myšlení aspoň trochu rozumět. Proti mému nematematickému myšlení postavte svoje myšlení matematické, aby žáci správně pochopili, v čem spočívá rozdíl – což je ostatně pěkný námět na úvahu nebo esej.

K studijnímu materiálu: Příběh není výklad látky a pomůcky nejsou cvičení. Vysvětlivky jsou určeny k vysvětlení nejasných pojmů, nikoli k soustavnému studiu stylem vyložit – procvičit – vyzkoušet. Materiál nijak neomezuje učitele v jeho operativní volbě metod a forem, ale ani z něj břemeno této povinnosti nesnímá. Pokud jde o *diagramy pojmů a souvislostí* a o zvukovou podobu příběhu – to je určeno hlavně dyslektikům, ale snad to usnadní práci s textem nejen jim.

- **Příběh** je spíš vyprávění určené zejména těm, kteří si myslí, že nemají nadání na matematiku – abych jim ukázal matematiku v souvislostech, aby pochopili smysl („proč se to mají učit“) a aby si uvědomili význam matematiky v kontextu ostatních oborů (Hippasův a Cantorův příběh: vývoj matematiky v souvislosti s problémy lidské společnosti; Pythagoras: filosofie a mystika; hudení akustika: přírodní vědy a umění; různé metody výpočtu iracionálních čísel: programování atd.) A dodejme: jak to u příběhů bývá, ani tento příběh není ani tak poučným výkladem, který by se čtenář měl naučit zpaměti, ale spíš řadou otázek a námětů k hlubšímu zamyšlení – ať si to každý přebere, jak umí.
- **Diagramy pojmů a souvislostí** ukazují názorně, o které důležité pojmy jde a jak tyto pojmy navzájem souvisí. Při kreslení diagramů jsem vyšel z normy OntoUML[54], kterou jsem pro potřeby názorné výuky upravil v duchu Aristotelových Kategorií [4]. Jsou to obrázky, které mohou nahradit dlouhé popisy a složitá vysvětlování. Zajímalo by mne, co na to dyslektici?
- **Vysvětlivky** obsahují odvozování (např. odvození odmocniny ze dvou jako úhlopříčky čtverce) a důkazy (např. odmocnina ze dvou není racionální číslo) a vysvětlují důležité pojmy (např. poziční číselné soustavy) a výpočetní postupy (např. bisekce). Uvádějí čtenáře jak do matematického, tak i do technického (programátorského) způsobu myšlení. Počítejte s tím, že většinu žáků je potřeba ke studiu vysvětlivek nějak motivovat. Moje vysvětlivky lze většinou nahradit webovými stránkami v internetu (některé odkazy uvádím v seznamu literatury).
- **Prezentace** jsou určeny především k frontálním výkladům, aby učitel nemusel psát na tabuli. Pro samostudium jsou asi vhodnější vysvětlivky a pomůcky. K frontálnímu výkladu jako didaktické formě se ještě vyjádřím z hlediska metodiky – k čemu a za jakých okolností je dobrý a kdy nikoli.
- **Pomůcky** mají podobu interaktivních webových stránek, které nemají serverovou část aplikace – běží tedy pouze ve webovém prohlížeči. Interaktivita souvisí s názorností: uživatel např. snadno pochopí, že funkce $f(n) = 2^n$ roste v celém rozsahu n podstatně rychleji než $f(n) = n$. Dá se pozorovat, jak rychle konverguje k řešení např. metoda sečen a jak zoufale pomalu obecně známé neoptimalizované Taylorovy řady. Na simulaci kmitání strun je vidět, jak se zkracováním kmitny zvyšuje frekvence a tedy i výška tónu. Atd.

Proč trvám na vyučování v souvislostech? U nás máme gymnázium jako jediný typ školy, který má žákům poskytovat všeobecné vzdělání, ale neposkytuje – právě proto, že žáci se učí jednotlivé předměty odděleně (bez souvislostí). Podle rámcového programu je to hrubá chyba (RVP-G vyžaduje přesahy a souvislosti), ale učitelé dějepisu nesnášejí, když jim do dějepisu někdo tahá češtinu, češtináři nesnášejí v češtině fyziku, matikáři zase dějepis atd. Ale právě to je důležité, aby si žáci srovnali v hlavě, jestli je pro vývoj lidské kultury (tj. všeho, co nevznikne přirozeně) důležitější, že někde nějaký mocichtivý psychopat dal zavraždit vlastního bratra nebo dal věšet tisíce pohanů v lesích na stromy (a pak byl za to svatořečen a dodnes je uctíván), nebo když někdo zkonstruuje čerpadlo na vodu, naučí felláhy vždy znovu po každoroční záplavě vyměřit jejich políčka, kapitány korábů přesně odměřovat čas při obeplouváni zeměkoule (nebo kuchařky při

54 Viz https://ontouml.org/ – tyto diagramy znázorňují oborové nebo problémové ontologie (něco jako terminologické standardy) vytvořené na základě Unified Foundational Ontology (UFO) Giancarla Guizzardiho pro potřeby analýzy a navrhování podnikových procesů (enterprise engineering, business process engineering & reengineering).

vaření vajíček na měkko a na tvrdo), nebo zapisovat mýty a eposy pomocí písmenek, aby nehrozilo, že je rapsódi pozmění nebo zapomenou atd. Cílem všeobecného vzdělání má být, aby žáci chápali svět jako smysluplný celek – a právě to u nás školy nedělají (výjimky jsou výjimečné – a těmto výjimkám budiž čest). A proč zrovna smysluplný celek? Např. proto, že ztráta smyslu je jedním z nejobvyklejších důvodů k sebevraždě.

Jaké metody a formy výuky doporučuji? Nabízený materiál se nehodí k metodě vyložit – procvičit – vyzkoušet. Nic proti vykládání látky. Cantorův příběh obsahuje myšlenky a paradoxy dostatečně šílené, aby dospívající mládež zaujaly. Moje zkušenost je, že gymnazisté dokážou sledovat šílený výklad třeba i 80 minut v kuse bez přestávky, zatímco normálně jsem buď vůbec nevykládal, nebo omezil výklad na 10 až 15 minut (jak dlouho žáci vydrželi sledovat). No a právě s pozorností žáků učitelé nejvíc zápasí, pokud chtějí, aby se žáci z jejich výkladů něco naučili.

Doporučené řešení potíží s pozorností: Mám-li připravený výklad, ale žáci neudrží pozornost, vyměním si s žáky role (to je tzv. inverze rolí) – velmi účinný, ale nikoli samospasitlený krok – a to takhle: Osnovu výkladu přeformuluji na seznam otázek. Žáci pak dostanou za úkol samostatně vypracovat odpovědi, které mi na konci hodiny předloží (např. pošlou mejlem) k připomínkám a hodnocení. Žáci mohou pracovat jednotlivě, ve dvojicích, příp. mohou spolupracovat ve skupinkách. Když si nevědí rady, zeptají se mě. Když chtějí něco vysvětlit, poskytnu krátký výklad k tématu požadovanému žáky. Na jednoduché otázky odpovídám individuálně jednou větou, složitější otázky, pokud zajímají většinu třídy, vysvětlím formou frontálního výkladu (tady pomůže připravená prezentace). Když nevím, tak se omluvím, doporučím zdroj, příp. vysvětlím příště. Inverze rolí spočívá v tom, že žáky při studiu neřídím striktně a celou hodinu, nýbrž jim nechám volnost ve studiu zadaného tématu a *na požádání* poskytuji potřebné služby.

Podle mého názoru ještě lepší než jednoduchá inverze rolí jsou samostatné práce (bez podrobného seznamu otázek) – např. eseje nebo skupinové projekty – typicky řešit nějaký zadaný problém, např. vyrobit nebo upravit pomůcku (třeba interaktivní webovou stránku). Žáci musí:

- Proniknout do problému (co komu vadí na současném stavu)
- Pochopit problémovou situaci (významy pojmů a souvislosti mezi nimi a s pomocí pojmů pak popsat žádoucí a nežádoucí chování dosavadního systému)
- Stanovit požadavky na žádoucí chování nového nebo upraveného systému
- Pokusit se o řešení

V zájmu vzdělávání určitě záleží mnohem víc na pochopení problémové situace než na úspěšném vyřešení problému. Tímto způsobem se rozvíjejí schopnosti samostatně studovat, kriticky uvažovat, řešit problémy a spolupracovat.

Eseje by měli žáci vypracovávat každý sám za sebe (zdůvodnit svůj názor na věc), ale redakční spolupráce je žádoucí (vzájemné recenze, připomínky apod.) Potom každý autor svou esej odprezentuje a odevzdá k ohodnocení.

Moje zkušenost je, že není ani tak těžké zadat vydatná témata, ze kterých si žáci vybírají, ale je těžké přimět žáky k hlubšímu zamyšlení a k soustavné práci, když se jedná o projekt na několik hodin. Ale ono mnohdy stačí, že žáci dělají něco užitečného, dělají to rádi a nějakých výsledků přece jen dosáhnou.

Studium v souvislostech nabízí žákům možnost studovat napříč předměty a učitelům možnost spolupracovat s učiteli jiných předmětů. Dá se tak ušetřit spousta času a úsilí (viz „líný učitel“ Robert Čapek). Každý učitel bude poskytovat konzultace v oboru, kterému rozumí, a nakonec si ohodnotí projekty, eseje nebo jiné práce ze svého hlediska (češtinář ohodnotí srozumitelnost vypracovaných textů a vyjadřovací schopnost žáků, dějepisář úvahy o úloze matematiky v kulturním a technologickém rozvoji lidské společnosti, fyzikář a učitel hudebky hudební akustiku, matikář matiku, informatikář vypracované algoritmy a nealgoritmy atd.)

Příklady otázek, cvičení, námětů na eseje a témat projektů:

- Zjistěte, co a proč počítají mravenci a jak na to přírodovědci přišli.
- Jak se spočítá obvod zeměkoule ze vzdálenosti mezi Alexandrií a Memfisem a z úhlů, pod kterými na tato města svítí polední slunce? Ověřte prakticky! (Vzdálenost můžete odměřit na mapě a úhly určíte podle rovnoběžek, na kterých leží Alexandrie a Memfis. Můžete počítat i se vzdáleností a zeměpisnými šířkami jiných měst, která leží na shodném poledníku.)
- Skládá se přímka z většího počtu bodů než úsečka? Zdůvodněte, proč ano, nebo proč ne! Dá se vůbec nějak porovnat počet bodů na přímce a na úsečce? Jak?
- Jaká čísla vyplňují mezery mezi racionálními čísly na číselné ose? Jak se nazývají? Uveďte příklad takového čísla.
- Byl Georg Cantor slušný člověk? Byl Pythagoras slušný člověk? Proč ano? Proč ne?
- Kdo byl René Descartes? Co dělal na Bílé hoře po poledni 8. listopadu 1620? Jaký byl jeho vztah k Římskokatolické církvi? Které slavné pojednání napsal? A o čem to je?
- K důkazu sporem: V čem spočívá rozdíl mezi důkazem přímým a nepřímým? Je důkaz sporem přímý nebo nepřímý? Co je to *kontrabajšpíl* a k čemu slouží? Jak souvisí použití *kontrabajšpílu* s kvantifikací (když jde o čísla, tak se tvrzení vztahuje buď na všechna čísla, nebo na aspoň jedno číslo)?
- Proč se iracionální číslo nedá vypočítat pomocí algoritmu?
- Jak se člověk učí? Poslechem výkladu? Nebo spíš bádáním? Jak jinak? (Např. chybami, napodobováním mistra, diskusí v kavárně, zjevením tajemných pravd, vyvozováním důsledků z ověřených předpokladů, pozorováním světa, působením psychedelik, životní praxí, pochybnostmi, úžasem…)
- Opravdu touží všichni lidé od přirozenosti po vědění? Zdůvodněte svoji odpověď! Která kniha začíná tvrzením, že tomu tak je? Který optimista je jejím autorem?
- Jak se matematické myšlení liší od myšlení založeného spíš na zkušenosti a ze zkušenosti plynoucí reflektované existenciální praxi? Jak přemýšlí matematik? Je to normální? Pokud ne: Jak se liší matematické myšlení od normálního myšlení? Pokud ano: jakou normu

splňuje? Čím je matematické myšlení cenné, příp. nenahraditelné, a jaké má slabiny? Porovnejte exaktní myšlení s empirickým.

- Patří do matematiky i to, co člověk nevymyslí a nezkonstruuje? Dá se v matematice vymyslet a zkonstruovat všechno?
- Je matematika i s iracionálními čísly a nespočetnými množinami něco objektivního, něco, co si lidé nevymýšlejí, nýbrž objevují? Nebo je matematika naopak jen lidský výmysl? Nebo je to jinak? Zdůvodněte!
- Vyhledejte celou větu z knihy Kazatel, ze které cituji v textu. Kdy přibližně byla napsána? Je stále aktuální? Souhlasíte s ní? Zdůvodněte proč ano a proč ne!

Uvedené otázky a náměty mají různou úroveň obtížnosti a ne každý žák bude schopen každou otázku pochopit. Také odpovědi pak budou záviset na věku a dosaženém vzdělání žáka. Kladně bych hodnotil především schopnost kritického zhodnocení otázky, schopnost rozpoznat relevantní zdroje a vytěžit je a konečně samostatnost celkového úsudku při odpovědi.

Literatura

1. JANÁČ, Marek. *Dovedou zvířata počítati?* Vesmír 98, 723, 2019/12. ISSN 1214-4029. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2019/cislo-12/dovedou-zvirata-pocitati.html
2. *Nula.* Wikipedie. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Nula
3. *Rationale Zahl.* Wikipedie. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Zahl
4. ARISTOTELÉS, ze Stageiry. *Organon I, Kategorie*, kapitola 6, 4b20, 22–37, 5a1–14. Překlad a poznámky Jiří Hejlek, Aleš Havlíček, Jakub Jinek. OIKOYMENH, Praha 2018, ISBN 978-80-7298-516-6.
5. FIKÁČEK, Jan: *Nekonečno jako mechanický bůh.* Blog iDNES.cz, 9. 11. 2017. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://fikacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=631725
6. *Pythagoras.* Wikipedie. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagoras
7. PETRŽELKA, Josef: *Pýthagorejci.* Dějiny filosofie I: 3. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/ff/ps14/phil/web/tisk3.html
8. ARISTOTELÉS, ze Stageiry. *Etika Níkomachova* I, 4, 1096a11-17. Překlad a poznámky Antonín Kříž. Praha: Petr Rezek, 2009, ISBN 80-86027-29-5.
9. *Square Root of Two.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2
10. *Georg Cantor.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
11. COUFAL, Jan; Jiří Tobíšek. *Úvod do infinitezimálního počtu.* [cit. 2022-11-28]. Dostupný z

WWW https://www.matematikavsem.cz/uvod-do-infinitezimalniho-poctu.html

12. *Reálné číslo.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Re%C3%A1ln%C3%A9_%C4%8D%C3%ADslo
13. *Real Number.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://en.wikipedia.org/wiki/Real_number
14. Kolektiv autorů. *Jak vypočítat odmocninu bez kalkulačky.* Metoda 2, Ruční výpočet odmocnin s pomocí postupu pro písemné dělení. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://www.wikihow.cz/Jak-vypo%C4%8D%C3%ADtat-odmocninu-bez-kalkula%C4%8Dky
15. *Cantorův paradox.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantor%C5%AFv_paradox
16. *Burali-Fortiho paradox.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Burali-Fortiho_paradox
17. *Taylorova řada.* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada
18. KUCKIR, Ivan. *Taylorův polynom srozumitelně.* 2010. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW http://ivankuckir.blogspot.com/2010/09/tayloruv-polynom-srozumitelne.html
19. *Pí (číslo).* Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/P%C3%AD_(%C4%8D%C3%ADslo)
20. REICHL, Jaroslav; Martin Všetička. *Eratosthenes z Kyrény.* Encyklopedie fyziky. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1440-eratosthenes-z-kyreny
21. *Eulerovo číslo.* Wikipedie. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerovo_%C4%8D%C3%ADslo
22. *Logaritmus.* Wikipedie. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Logaritmus#P%C5%99irozen%C3%BD_logaritmus
23. *Zlatý řez.* Wikipedie. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://cs.wikipedia.org/wiki/Zlat%C3%BD_%C5%99ez
24. *Von Neumann Universe* (česky: *Fundované jádro*). Wikipedia. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann_universe
25. HAVRLANT, Lukáš. *Matematika polopatě.* [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://www.matweb.cz/
26. BERÁNEK, Jaroslav. *Číselné obory.* [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://is.muni.cz/el/ped/podzim2010/Ma2BP_PAL3/um/CISELNE_OBORY.pdf
27. MASARYK, Tomáš Garrigue. *Ideály humanitní,* str. 56. Městská knihovna v Praze, Praha 2016, ISBN 978-80-7532-203-6. [cit. 2022-11-28]. Dostupný z WWW https://web2.mlp.cz/koweb/00/04/26/39/49/idealy_humanitni.pdf

Pomůcky na webu a kontakt na autora

Jedná se o rozfázovaná odvozování v pdf, diagramy a interaktivní ukázky výpočtů v html:

Zvuková podoba příběhu

RealnaCisla_Cetba.mp3

Diagramy pojmů a souvislostí

Hierarchie číselných oborů, viz Cisla.svg

Hierarchie číselných oborů barevně a s ikonami, viz CislaBarevneSIkonami.svg (např. pro dislektiky)

Racionální číslo jako poměr čísel celých, viz RacionalniCislo.svg

Iracionální čísla definovaná na geometrických obrazcích, viz Obrazce.svg

Základní druhy důkazů, fáze přímého důkazu a důkazu sporem, viz Dukazy.svg

Zápisy čísel číselnými rozvoji, viz CiselneRozvoje.svg

Mohutnosti množin, viz MohutnostiMnožin.svg

Prezentace

RealnaCisla_1.pdf

RealnaCisla_2.pdf

RealnaCisla_3.pdf

RealnaCisla_4.pdf

Animace a interaktivní ukázky

(**POZOR:** html nestačí otevřít, je potřeba stáhnout a otevřít stažený soubor)

KmitaniStrun_Animace.html

Bisekce.html

MetodaSecen_tan.html

MetodaSecen.html

EulerovoCislo.html

HippasovoCislo.html

LudolphovoCislo.html

IntegraceHyperboly.html

PocetPodmnozin.html

Vyjmenovavani.html

Poděkování

Děkuji především paní **RNDr. Marii Konopkové** a paní **Mgr. & Mgr. Stanislavě Bouškové** za nápad, motivaci a první reakce na příběh o reálných číslech. Panu **Mgr. Pavlu Bočkovi** děkuji za zasvěcenou kritiku první verze příběhu. Jeho kritické poznámky mě přivedly k tomu, abych co nejdůsledněji odděloval příběh od vysvětlování pojmů. Děkuji panu **Ing. Františku Douškovi** za přečtení textu včetně vysvětlivek a za doplnění a upřesnění důkazu, že odmocnina ze dvou není racionální číslo. Děkuji paní **Ing. Dagmar Rýdlové** za obětavé konzultace, připomínky, rady a návrhy, jak materiál zlepšit. Děkuji spoluautorce **prof. Boženě Payerové** za vyprávění příběhu o objevování reálných čísel a jejich podivuhodných vlastností. Moje zvláštní poděkování pak náleží pracovníkům Metodického portálu RVP.CZ za možnost zveřejnit vytvořený materiál a nabídnout jej k použití ve výuce.

Kontakt na autora

mailto: ryanti@acm.org