Jihomoravské centrum pro mezinárodní mobilitu

T-exkurze

Nedokonalosti dokonalé matematiky

Kunice 2015

Petr Pupík

Obsah

Úvod

Milí studenti,

vítám vás na začátku dalšího povídání o matematice. Naše povídání začněme trochu netradičně a to v našich médiích. Ta nás informují o denních událostech, výsledcích ve sportu, o tom, zda zítra bude možná hezky či bude možná pršet. Můžeme sledovat zprávy z politiky - české i té zahraniční, ostře sledované jsou krimi zprávy a tu a tam se objeví i zprávy z průmyslu a vědy. Například, že byl na trh uveden nový model škodovky, že byla objevena nová planeta a nebo že vědci pracují na léku na tu a tu nemoc. Možná sleduji nesprávnou televizní stanici, ale dosud jsem neviděl žádnou zprávu z matematiky. Je to tím, že matematičtí vědci spí a neprodukují nové výsledky? Nebo snad tím, že v matematice již bylo vše objeveno a již nám nemůže nabídnout nic nového?

Myslím, že je třeba hledat důvody jinde. Jednak je bohužel matematika pro značnou část televizních diváků či čtenářů denního tisku velmi obtížná a snad i proto neoblíbená. Věřím, že zrovna toto se nás netýká. Druhým důvodem je komplikovanost a náročnost nových výsledků. I ten, kterého matematika baví, by jen těžko pochopil zadání problému, natož jeho řešení.

My se budeme snažit v našem textu popasovat s tímto druhým problémem. Totiž budeme se snažit si představit dosud nevyřešené, právě řešené nebo teprve nedávno vyřešené problémy matematiky. Ukážeme si, jaké výzvy čekají na matematické vědce a kdo ví, možná i na někoho z vás.

A tak se setkáme s prvočíselnými dvojčaty, spřátelenými či dokonalými čísly. Zabrousíme do oblastí, které se říká teorie grafů, a ukážeme si, co je to problém 4 barev. Bude toho samozřejmě daleko více.

Také si budeme povídat o tom, jak se matematika dostala do úzkých a díky tomu, že nedokázala jednoznačně odpovědět relativně jednoduché otázky, nastaly takzvané krize matematiky. Čeho se tyto otázky týkaly, si povíme na závěrečném setkání.

Tolik asi stačí k představení letošního povídání. Nyní už se pusťme do představení několika problémů. Ještě však poznamenejme, že jen těžko se nám podaří zde jmenované problémy vyřešit. Jedná se ve většině případů o problémy, které jsou staré desítky, stovky a mnohdy i tisíce let. Po celou tuto dobu se matematici celého světa snažili tyto problémy prolomit. U některých se jim to povedlo, některé zůstávají stále otevřené. Jen těžko lze předpokládat, že zrovna skupina jistě nadaných středoškoláků z jižní Moravy rozlouskne právě tyto problémy. Ale kdo ví, třeba...

Kapitola 1

Od čísel ke geometrii a zpět

V první kapitole si budeme postupně představovat různé matematické problémy. Některé z nich budou vyřešené, jiné teprve na řešení čekají. Začněme problémy z teorie čísel.

Teorie čísel, moderní, krásná, ale i zrádná a obtížná oblast matematiky. Kde se vůbec vzala? V 17. století žil ve Francii právník Pierre Fermat. Tento později zásadní matematik holdoval četbě a tak často navštěvoval knihovnu a půjčoval si zde knížky. Doma pak, když se do knih ponořil, se mu honily hlavou různé myšlenky a to i třeba myšlenky matematické. Tu jednou ho napadlo: „Když sečtu druhé mocniny trojky a čtyřky, dostanu druhou mocninu pětky.“ To ho ani tak nepřekvapilo, uvedeným trojicím celých čísel a, b, c takových, že $a^2 + b^2 = c^2$, se říká Pythagorijské trojice. Když si vzpomeneme na Pythagorovu větu, tak nás ten název nikterak nepřekvapí. Fermat se na to podíval hlouběji a zeptal se, zda by mohly existovat celá čísla a, b, c tak, aby $a^3+b^3 = c^3$. Odpověděl si, že určitě ano, například čísla 0, 1 a 1 tuto rovnost splňují. Jak by to ale dopadlo, kdybychom přidali požadavek, že tato čísla musí být nenulová. Fermat se domníval, že se nám taková nenulová celá čísla najít nepodaří a to dokonce ani pro čtvrté, páté ani žádné další mocniny. Jinými slovy se domníval, že pro žádné přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, neexistují nenulová celá čísla a, b, c tak, aby $a^n + b^n = c^n$. Toto vše si poznamenal na okraj jedné knížky půjčené z knihovny. Poznamenal zde také, že samozřejmě nalezl důkaz uvedeného tvrzení, bohužel by se však nevešel na okraj této stránky.

A zde nastal problém. Tvrzení bylo formulováno, bohužel ale nebylo dokázáno a nebylo tedy možné ověřit, zda je pravdivé. Fermatovy poznámky na okraji jeho knihy byly nalezeny krátce po Fermatově smrti. Od té doby se matematici celého světa snažili uvedené tvrzení dokázat či vyvrátit. Leč marně. Přicházeli na nové a nové výsledky. Byly objeveny kvadratické formy, eliptické křivky a spoustu dalších důležitých aparátů, ovšem Fermatovo tvrzení stále odolávalo. Díky pokusům o zdolání tohoto tvrzení nám vznikla celá krásná oblast matematiky, kterou nyní nazýváme Teorie čísel. Uvedenému tvrzení se začalo říkat Velká Fermatova věta.

A jak to celé dopadlo? Až v roce 1994 se podařilo britskému matematikovi Andrew Wilesovi dokázat, že měl Fermat pravdu. Důkaz je velmi komplikovaný, je v něm využito mnoho matematického aparátu, který byl objeven až dávno po smrti Fermata, a tak se všeobecně předpokládá, že se tehdy Fermatovi nejspíše své tvrzení dokázat nepodařilo.

Ovšem právě díky němu můžeme nyní studovat tak krásný obor, jakým bezesporu Teorie čísel je. A co je na matematice a obecně na jakékoliv seriózní vědě nejúžasnější, že ryze teoretické úvahy nad čistě matematickým problémem vedly ke spoustě praktických a hojně využívaným aplikacím. U teorie čísel zmiňme například šifrování a šifrovací algoritmy RSA a ElGammal (o těchto algoritmech byla také jedna z T-exkurzí), přičemž první algoritmus nevyužívá ničeho jiného než náročnosti rozkladu přirozeného čísla na součin prvočísel. Dále zmiňme například eliptické křivky, které se hojně využívají při tvorbě digitálního podpisu. A právě eliptické křivky[1] tvoří jeden dílek v důkazu Velké Fermatovy věty. Není to tedy tak, že by matematika byla pouze teoretickou vědou, ale má hluboké aplikace.

Zastavme se tedy nejprve u dalších problémů teorie čísel. Prvním z nich bude problém tzv. prvočíselných dvojčat.

1.1 Prvočíselná dvojčata

Prvočíselná dvojčata (*prime twins*) jsou dvě po sobě jdoucí lichá přirozená čísla, která jsou obě prvočísla. Příkladem prvočíselných dvojčat jsou dvojice 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19, 29 a 31 nebo také 41 a 43. Hezky zapamatovatelná jsou například 1000000000061 a 1000000000063. Víme, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kolik je ovšem prvočíselných dvojčat? Tato otázka zůstávala dlouho neodpovězena. V květnu 2013 však došlo k přelomovému objevu. Americko-čínský matematik Yitang Zhang, kterého neuživila matematika a tak začal prodávat v Americe hamburgery, dokázal, že existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel, které se liší nejvýše o 70 000 000. Ačkoliv prvočíselná dvojčata se liší o dvě a Zhang to dokázal pro hranici 70 000 000, byl to první velký úspěch ve zkoumání prvočíselných dvojčat. O rok později pak došlo ke zmenšení této hranice na číslo 246. Nyní tedy již víme, že existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel, které se liší nejvýše o 246. Kdo ví, jak to bude vypadat v době, až si budete číst tento text… Poznamenejme ještě, že Yitang Zhang byl v roce 2014 jmenován profesorem na univerzitě v New Hampshire.

Podobně jako zkoumáme prvočíselná dvojčata, můžeme sledovat prvočíselná trojčata. Než si uvedeme definici prvočíselných trojčat, uveďme si jedno tvrzení, které nám dále uvedenou definici malinko objasní.

Věta 1.1.1. *Kromě trojice* $3, 5, 7$ *neexistují tři po sobě jdoucí lichá čísla, která by byla všechna prvočísly.*

Důkaz. Uvažujme tři po sobě jdoucí lichá čísla, která označme a, $a + 2$, $a + 4$. Pokud je číslo a dělitelné třemi, potom je buď rovno třem, potom máme trojici $3, 5, 7$. V ostatních případech je a číslo složené a tedy a, $a + 2$, $a + 4$ nejsou všechna prvočísla. Pokud dává číslo a po dělení třemi zbytek 1, potom $a = 3n + 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{Z}$. Potom $a + 2 =$

[1] Eliptické křivky toho mají pramálo společného s kuželosečkami. Jedná se o jakousi křivku v rovině, na které je definována operace sčítání bodů. A tato operace se chová velmi hezky. Můžeme si to představit tak, že je to podobné sčítání celých čísel. Tedy stejně jako sčítáme celá čísla, můžeme i sčítat body na eliptické křivce. A právě toto spojení algebry a geometrie vede k úžasným výsledkům, díky kterým můžeme například šifrovat.

$3n + 1 + 1 = 3n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$ a tedy je číslo $a + 2$ dělitelné třemi a opět a, $a + 2$, $a + 4$ nejsou všechna prvočísla. Konečně, pokud dává a po dělení třemi zbytek 2, potom $a = 3n + 2$ a opět dostáváme, že $a + 4 = 3n + 2 + 4 = 3n + 6 = 3 \cdot (n + 2)$ a tedy je číslo $a + 4$ dělitelné třemi. Dostali jsme tak, že jediným možným případem, kdy mohou být tři po sobě jdoucí lichá čísla prvočísly, je trojice $3, 5, 7$. □

Odtud vidíme, že prvočíselná trojčata nebudeme definovat jako tři po sobě jdoucí lichá čísla, která jsou všechna prvočísla.

Definice 1. Prvočíselná trojčata jsou trojice prvočísel, které jsou tvaru $p, p+2, p+6$ nebo tvaru $p, p + 4, p + 6$.

Příkladem prvočíselných trojčat jsou trojice $5, 7, 11$; $7, 11, 13$ a $11, 13, 17$. Asi nikoho nepřekvapí, že dosud nevíme, kolik existuje prvočíselných trojčat (tj. zda jich je konečně či nekonečně mnoho).

Obdobně můžeme mluvit o čtyřčatech, paterčatech a podobně. Opět dosud nevíme, kolik jich existuje.

1.2 Dokonalá čísla

Nyní nás čeká povídání o dokonalých číslech (*perfect numbers*). Pojem dokonalé číslo zmiňuje již Euklidés ve svých Základech[2] ve 4. století před naším letopočtem. Označme si $\sigma(n)$ součet všech přirozených dělitelů přirozeného čísla n. Je tedy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Definice 2. O přirozeném čísle n řekneme, že je dokonalé, jestliže $\sigma(n) = 2n$.

Hned na začátku jsme si ukázali první dokonalé číslo, kterým je číslo 6. Dalším dokonalým číslem je číslo 28, protože $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$. Dalšími dokonalými čísly jsou čísla 496, 8128. Tuto čtveřici dokonalých čísel znal již Euklides ve čtvrtém století před naším letopočtem. Další dokonalé číslo bylo objeveno až v 15. století a bylo to číslo 33550336. Od roku 2013 známe 48 dokonalých čísel. To dosud naposledy objevené dokonalé číslo je číslo $2^{57885160} \cdot (2^{57885161} - 1)$. Tento tvar není náhodný, jak si ukážeme dále.

Dodnes však vůbec nevíme, kolik dokonalých čísel máme. Dokonce ani nevíme, zda existuje nějaké liché dokonalé číslo. Od listopadu roku 2014 víme, že neexistuje žádné liché dokonalé číslo menší než 10^{1500}.

Je zvláštní, že nyní známe pouze 48 dokonalých čísel, ale o dokonalých číslech toho víme vcelku hodně. Problém dokonalých čísel totiž trápil matematiky po tisíciletí a tak bylo odvozeno spoustu tvrzení týkajících se dokonalých čísel. My si nyní některá ukážeme a dokážeme.

[2]Euklides sepsal Základy matematiky, ve kterých se pokusil o výstavbu celé tehdy známé matematiky. Nejznámější je část týkající se geometrie, proto též dnes mluvíme o Euklidovských konstrukcích. Zajímavostí je, že Euklidovy základy se ještě v 19. století používaly v Anglii jako učebnice.

Věta 1.2.1. *Je-li pro nějaké přirozené číslo n číslo $2^n - 1$ prvočíslem, je číslo $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ dokonalé.*

Důkaz. Pojďme se podívat na dělitele čísla $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$. Toto číslo označme N. Protože je podle předpokladu číslo $2^n - 1$ prvočíslem, má pouze dva dělitele a to 1 a $2^n - 1$. Číslo N má tedy tři druhy dělitelů. Jednak to jsou dělitele 2^{n-1}, jednak jsou to dělitele čísla $2^n - 1$ a pak všechny součiny dělitelů obou činitelů čísla N. Jsou to tedy čísla 1, $2^n - 1$, $2, 4, \dots 2^{n-1}$ a $(2^n - 1) \cdot 2$, $(2^n - 1) \cdot 4, \dots, (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$. Sečtěme nyní tyto dělitele

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} + (2^n - 1) \cdot (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}) \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} + (2^n - 1) \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&= (2^n - 1) \cdot (1 + 2^n - 1) \\
&= 2^n \cdot (2^n - 1) \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) \\
&= 2 \cdot N.
\end{aligned}$$

Číslo N je tedy dokonalé. □

Tvrzení v předchozí větě tušil již Euklidés. Tato věta nám též dává zčásti odpověď na otázku, proč je nejnovější dokonalé číslo v takovém tvaru, v jakém je. Nicméně je zajímavou otázkou, jak je to naopak. Tedy zda každé dokonalé číslo musí být v tomto tvaru. Odpověď pro sudá dokonalá čísla našel v 18. století Leonhard Euler.

Věta 1.2.2. *Pro každé sudé dokonalé číslo N existuje přirozené číslo n tak, že $N = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$, kde $2^n - 1$ je prvočíslo.*

Důkaz. Nechť N je dokonalé číslo. Vyjádřeme číslo n jako součin co nejvyšší mocniny dvojky a lichého čísla, tj. $N = 2^k \cdot m$, kde $(2, m) = 1$, přičemž (a, b) značí největší společný dělitel čísel a a b. Položme $n = k + 1$, tedy $N = 2^{n-1} \cdot m$, kde $(2, m) = 1$.

Pojďme nyní počítat součet dělitelů čísla N. Protože je N dokonalé číslo, je

$$\sigma(N) = 2 \cdot N = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot m = 2^n \cdot m \tag{1.1}$$

Spočítejme $\sigma(N)$ i jiných způsobem. Označme $d_1, d_2, \dots, d_s$ dělitele čísla m a předpokládejme, že je máme seřazené vzestupně. Potom $d_1 = 1$, $d_s = m$. Potom číslo $N = 2^{n-1} \cdot m$ má právě tyto dělitele

$$\begin{array}{cc}
1 \cdot d_1, 2 \cdot d_1, 4 \cdot d_1, 8 \cdot d_1, & \dots \quad , 2^{n-1} \cdot d_1 \\
1 \cdot d_2, 2 \cdot d_2, 4 \cdot d_2, 8 \cdot d_2, & \dots \quad , 2^{n-1} \cdot d_2 \\
 & \dots \\
1 \cdot d_s, 2 \cdot d_s, 4 \cdot d_s, 8 \cdot d_s, & \dots \quad , 2^{n-1} \cdot d_s
\end{array}$$

Můžeme tedy počítat $\sigma(N)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= 1\cdot d_1 + 2\cdot d_1 + 4\cdot d_1 + 8\cdot d_1 + \cdots + 2^{n-1}\cdot d_1 + \\
&\quad 1\cdot d_2 + 2\cdot d_2 + 4\cdot d_2 + 8\cdot d_2 + \cdots + 2^{n-1}\cdot d_2 + \\
&\quad \cdots + \\
&\quad 1\cdot d_s + 2\cdot d_s + 4\cdot d_s + 8\cdot d_s + \cdots + 2^{n-1}\cdot d_s \\
&= d_1(1+2+4+\cdots+2^{n-1}) + \cdots + d_s(1+2+4+\cdots+2^{n-1}) \\
&= d_1(2^n-1) + \cdots + d_s(2^n-1) \\
&= (2^n-1)\cdot(d_1+\cdots+d_s) \\
&= (2^n-1)\cdot\sigma(m)
\end{aligned}$$

Odtud a z rovnice 1.1 dostáváme, že

$$2^n\cdot m = (2^n-1)\cdot\sigma(m).$$

A odtud máme, že

$$\sigma(m) = \frac{2^n\cdot m}{2^n-1} = \frac{(2^n-1+1)\cdot m}{2^n-1} = m + \frac{m}{2^n-1}.$$

Protože jsou $\sigma(m)$ i m přirozená čísla, je přirozené číslo i $\frac{m}{2^n-1}$. Platí tedy, že $2^n-1|m$. Je tedy 2^n-1 také dělitelem čísla m. Číslo m má tedy jisto jistě dělitele m, 1, 2^{n-1} a $\frac{m}{2^n-1}$. Pokud by se jednalo o 4 navzájem různé dělitele, bylo by $\sigma(m) > m + \frac{m}{2^n-1}$. Je tedy nutně $m = 2^{n-1}$ a $\frac{m}{2^n-1} = 1$. Číslo m má proto pouze dva dělitele, jedničku a sebe samo. To znamená, že je prvočíslo.

Dohromady tak máme, že $N = 2^{n-1}\cdot(2^n-1)$, kde 2^n-1 je prvočíslo, což jsme chtěli dokázat. □

Ačkoliv byl tento důkaz poněkud obtížnější, dal nám jasnou odpověď na to, jakého tvaru jsou sudá dokonalá čísla. Na závěr povídání o dokonalých číslech si ještě uveďme několik tvrzení, která jsou spíše zajímavostmi.

Věta 1.2.3. *Převedeme-li sudé dokonalé číslo tvaru $2^{n-1}\cdot(2^n-1)$ do dvojkové soustavy, dostaneme číslo, které bude začínat n jedničkami a poté bude následovat $n-1$ nul.*

Důkaz. Když převádíme číslo do dvojkové soustavy, dělíme toto číslo postupně se zbytkem dvěma a dvojkový zápis čísla je pak odzadu seřazený seznam zbytků. Dané číslo se nám nejprve podaří $n-1$ krát vydělit bez zbytku a poté budeme n krát dělit se zbytkem 1. □

Další zajímavé tvrzení nám dává odpověď na to, jakého tvaru může být n tak, aby bylo 2^n-1 prvočíslem.

Věta 1.2.4. *Je-li 2^n-1 prvočíslo pro nějaké $n\in\mathbb{N}$, potom je již jistě n prvočíslo.*

Důkaz. Dokažme si toto tvrzení nepřímým důkazem. Předpokládejme, že n není prvočíslo. Existují tedy $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b > 1$, taková, že $n = a \cdot b$. Potom

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \dots (2^a) + 1\right).$$

Tedy $2^n - 1$ není prvočíslo. □

Poznamenejme ještě, že obrácené tvrzení neplatí. Například číslo 11 je prvočíslo, ale $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Předchozí věta nám dále říká, že sudá dokonalá čísla máme hledat ve tvaru $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, kde p je prvočíslo.

Věta 1.2.5. *Součet převrácených hodnot všech dělitelů sudého dokonalého čísla je vždy 2.*

Důkaz. Uvažujme dokonalé číslo N ve tvaru $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Toto číslo má právě tyto dělitele

$$\begin{array}{rcl} 1, 2, 4, 8, 16, & \dots & , 2^{p-1} \\ 2^p - 1, 2 \cdot (2^p - 1), 4 \cdot (2^p - 1), 8 \cdot (2^p - 1), & \dots & , 2^{p-1} \cdot (2^p - 1) \end{array}$$

Pojďme nyní sečíst převrácené hodnoty těchto čísel

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p - 1} + \frac{1}{2 \cdot (2^p - 1)} + \frac{1}{4 \cdot (2^p - 1)} + \dots + \frac{1}{2^{p-1} \cdot (2^p - 1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^p - 1} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^p - 1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^p - 1}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{2^p - 1}{2^p} \cdot \frac{2^p - 1 + 1}{2^p - 1} \\
&= 2 \cdot \frac{2^p - 1}{2^p} \cdot \frac{2^p}{2^p - 1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

□

Poslední tvrzení, které si o dokonalých číslech uvedeme se týká posledních cifer.

Věta 1.2.6. *Každé sudé dokonalé číslo končí na číslici 6 nebo na číslici 8.*

Důkaz. Uvažujme dokonalé číslo N ve tvaru $N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Protože p je prvočíslo, dává po dělení čtyřmi zbytek 1 nebo 3 (výjimkou je $p = 2$, pro které tvrzení platí). Nastávají tedy dva případy:

1. Vyřešme nejprve situaci, kdy p dává po dělení čtyřmi zbytek 1. Potom jistě existuje celé číslo k takové, že $p = 4k + 1$. Dosadíme-li do našeho dokonalého čísla N, dostaneme
$$N = 2^{4k} \cdot (2^{4k+1} - 1) = 16^k \cdot (2 \cdot 16^k - 1).$$
Všechny mocniny čísla 16 ale končí na 6. Dvojnásobek čísla končícího na 6 končí dvojkou, kterou když zmenšíme o 1, bude výsledek končit vždy na jedničku. Dostáváme tak, že poslední cifra takového dokonalého čísla je vždy 6.

2. Pro druhý případ, tedy pro $p = 4k + 3$, je důkaz obdobný.

$\square$

O sudých dokonalých číslech toho tedy víme docela dost. Obzvláště když vezmeme v úvahu, že jich známe dosud pouze 48. O lichých toho bohužel tolik nevíme. Jak už jsme zmínili, nevíme ani, zda nějaké existuje.

S dokonalými čísly úzce souvisí Mersennova prvočísla, o kterých si krátce povíme něco nyní.

1.3 Mersennova prvočísla

Definice 3. Mersennovo prvočíslo je prvočíslo ve tvaru $2^p - 1$, kde p je prvočíslo.

Těmto prvočíslům se velmi věnoval Marin Mersenne, podle kterého se i jmenují. Prvními Mersennovými prvočísly jsou čísla 3,7,31 a 127. Důležité je, že s každým objevem dalšího Mersennova prvočísla dostaneme automaticky další dokonalé číslo, jak jsme si dokázali v předchozí sekci. Není tedy překvapivé, že dosud známe právě 48 Mersennových prvočísel.

V další sekci povíme, že i čísla mohou mezi sebou navazovat přátelství :)

1.4 Spřátelená čísla

Definice 4. O dvou přirozených číslech m a n řekneme, že jsou spřátelená, jestliže součet dělitelů čísla m, které jsou menší než m, je roven číslu n, a zároveň součet dělitelů čísla n, které jsou menší než n, je roven číslu m.

Například čísla 220 a 284 jsou spřátelená. Vypišme všechny dělitele čísla 220, které jsou menší než 220:
$$1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.$$
Pokud tato čísla sečteme, dostaneme součet 284. Podobně vypišme všechny dělitele čísla 284, které jsou menší než 284:
$$1, 2, 4, 71, 142.$$

Sečtením těchto čísel dostaneme 220. Tedy jsou skutečně tato čísla spřátelené.

Asi nás nepřekvapí, že dosud nevíme, kolik existuje dvojic spřátelených čísel. Zajímavé je, že všechny dvojice spřátelených čísel mají stejnou paritu (tj. jsou obě sudé nebo jsou obě liché). Dosud neznáme žádnou dvojici spřátelených čísel, kde by jedno číslo bylo sudé a druhé liché.

Co je však překvapující, že v roce 1946 bylo známo 390 dvojic spřátelených čísel. Dnes jich známe více než 12 miliónů.

Naše povídání o teorii čísel jsme začínali u významného francouzkého matematika Fermata. Pojďme se nyní podívat, co jsou to Fermatova čísla.

1.5 Fermatova čísla

Definice 5. Fermatovo číslo je přirozené číslo ve tvaru $2^{2^n} + 1$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Je-li navíc toto číslo prvočíslem, mluvíme o Fermatově prvočíslu.

Podle čísla n v exponentu se označují F_n. Máme tak $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$. Zmíněná Fermatova čísla jsou zároveň jedinými známými Fermatovými prvočísly. Například $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Do dnešního dne se matematikům podařilo dokázat, že $F_5, F_6, \ldots, F_{32}$ jsou složená, ovšem pouze u čísel $F_5, F_6, \ldots F_{11}$ známe rozklad na součin prvočísel. Do dnešního dne se neví, zda existuje ještě nějaké další Fermatovo prvočíslo. Vůbec nevíme, zda je nekonečně mnoho složených Fermatových čísel, ani to, zda existuje nějaké Fermatovo číslo, které není tzv. *square free*.[3]

Fermatova čísla mají vcelku velký význam v teorii čísel. My se podíváme na některé jejich zajímavé vlastnosti.

Věta 1.5.1. *Pro každé přirozené číslo n platí pro Fermatovo číslo F_n, že*

$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1.$$

Důkaz. Rozepisujme pravou stranu

$$(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2 \cdot 2^{n-1}} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n.$$

□

[3]Je-li číslo *square free*, potom není dělitelné druhou mocninou žádného přirozeného čísla kromě 1. Například všechna prvočísla jsou *square free*, číslo $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ je taktéž *square free*, ovšem 1000 *square free* není, protože je dělitelné druhou mocninou dvojky.

Fermatova čísla mají hezký význam v geometrii. Jistě jste se zamýšleli, které pravidelné mnohoúhelníky dokážeme sestrojit pouze pomocí pravítka[4] a kružítka (bez úhloměru). Takovýmto konstrukcím se říká Euklidovské. Trojúhelník a čtverec snadno. Pětiúhelník trochu náročněji, ale taktéž ho dokážeme sestrojit. Šéstiúhelník, osmiúhelník ano. Na konci 18. století se podařilo Carlu Friedrichovi Gaussovi sestrojit pravidelný sedmnáctiúhelník. Co ale takový sedmiúhelník a devítiúhelník?

Začátkem 19 století právě Gauss formuloval hypotézu o konstruovatelnosti pravidelných mnohoúhelníků, kterou se podařilo koncem první poloviny 19. století dokázat Pierre Wantzelovi. Nyní tedy přesně víme, jaké pravidelné mnohoúhelníky dokážeme zkonstruovat, což nám řekne následující věta.

Věta 1.5.2. *Pravidelný $n-$úhelník dokážeme sestrojit pomocí pravítka a kružítka právě tehdy, když n je mocnina čísla 2 nebo se jedná o součin mocniny čísla 2 a různých Fermatových prvočísel.*

Bohužel si toto tvrzení neumíme dokázat. Dává nám ale odpověď na to, že nedokážeme sestrojit ani pravidelný sedmiúhelník, ani devítiúhelník.

Zůstaňme ještě chvíli u geometrie. Je zajímavou otázkou, co vlastně můžeme sestrojit pouze pomocí pravítka a kružítka. Tuto otázku si pokládali matematici již ve starověku. Vznikly zde tzv. Starověké geometrické problémy.

1.6 Starověké geometrické problémy

Mezi starověké geometrické problémy patří zdvojení krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu. Pojďme si tyto problémy postupně představit.

Začněme zdvojením krychle a pověstí týkající se tohoto problému. V městě Atény vypukl mor. Obyvatelé vyslali na ostrov Délos své posly, aby se zeptali ve věštírně, co si mají počít. Orákulum jim odpovědělo, že se mají vrátit zpět do Atén a mají zdvojnásobit svůj krychlový oltář, přičemž mají zachovat jeho tvar. To že bude stačit. Atéňané si však s tímto problémem nedokázali poradit, protože se jim vůbec nepovedlo sestrojit hranu krychle s dvojnásobným objemem.

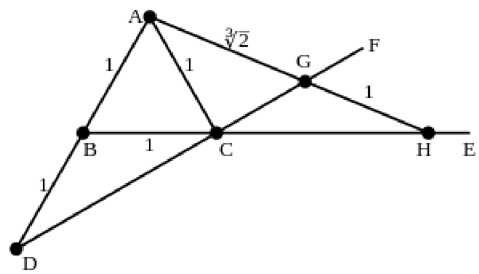
Uvedený problém se nám podaří vyřešit, pokud se nám euklidovsky podaří sestrojit úsečku délky $\sqrt[3]{2}$, protože pokud si označíme 1 délku hrany původní krychle, potom krychle mající dvojnásobný objem má hranu právě délky $\sqrt[3]{2}$.

Tento problém dostal pojmenování zdvojení krychle a někdy se mu též říká Délský problém. Spousta matematiků se snažila tento problém vyřešit. My si zde představíme jedno z řešení, které namísto klasického rovného pravítka bez jednotek využívá pravítko, které obsahuje jednotku.

Sestrojme rovnostranný trojúhelník ABC. Protáhněme stranu AB v přímku a sestrojme bod D tak, aby byl bod B středem úsečky AD. Sestrojme polopřímku DC. Nyní provedeme

[4] pravítko bez jednotek

onu „neeuklidovskou“ konstrukci. Vezměme pravítko a přiložme ho do bodu A právě tak, aby průsečíky s polopřímkami BC a DC měly vzdálenost 1. Označme tyto průsečíky po řadě H a G tak, jak je na obrázku



Délka úsečky AC bude nyní právě $\sqrt[3]{2}$. Bohužel jsme však využili konstrukce, která není euklidovská.

Matematikům se po více než 2000 let nedařilo si s tímto problémem poradit. A tak začala panovat představa, že to euklidovsky možné není. Velkým posunem bylo objevení analytické geometrie. Ta nám jakýkoliv geometrický problém dokáže převést na problém algebraický. Matematici tedy začali zkoumat, jaká reálná čísla vlastně dokáží pomocí pravítka a kružítka sestrojit. Roku 1837 se podařilo již zmiňovanému Pierre Wantzelovi dokázat, že právě číslo $\sqrt[3]{2}$ není zkonstruovatelné. Naznačme si ideu tohoto důkazu.

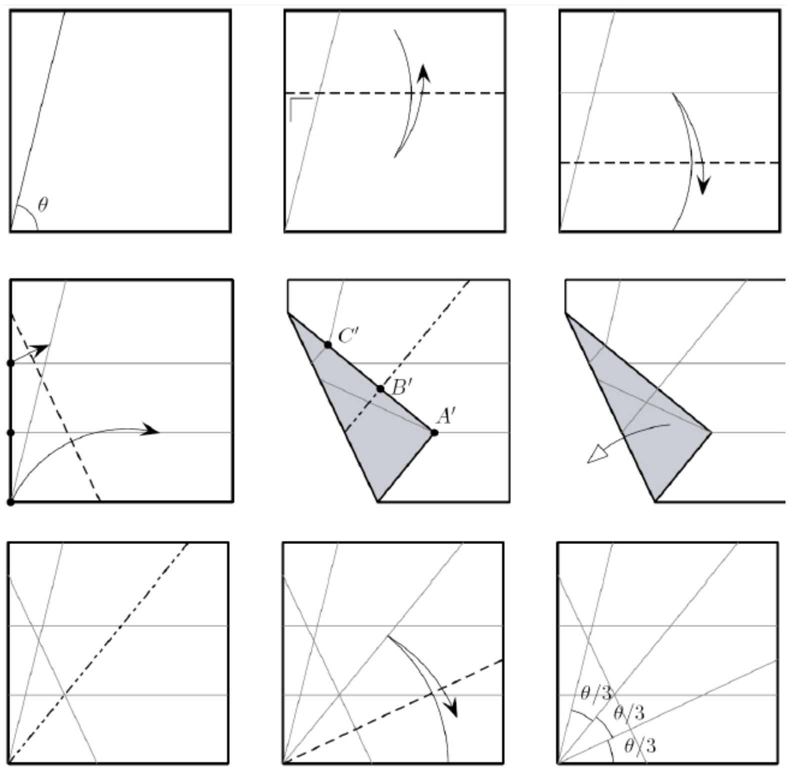
Jednoznačně umíme zkonstruovat všechna racionální čísla. Pokud uvažujeme konstrukce přímek a jejich průsečíků, tak v analytickém vyjádření mají přímky takovou obecnou rovnici, že proměnné x, y jsou v první mocnině. Když uvážíme kružnice, tak mají ve středových rovnicích obě proměnné ve druhé mocnině. Odtud lze vidět, pokud konstruujeme pouze průsečíky přímek, kružnic a přímek a kružnic, dokážeme sestrojit právě takové odmocniny, které jsou mocninou dvojky, proto $\sqrt[3]{2}$ není konstruovatelné číslo.

Poznamenejme, že jsme zde popsali pouze základní myšlenku tohoto důkazu. Ke kompletnímu důkazu bychom potřebovali trochu více znalosti z matematického oboru nazývaného algebraická teorie čísel. Nicméně je zde krásně vidět, jak objevem něčeho zdánlivě nesouvisejícího s konstrukční geometrií (tj. objevením souřadného systému) dokážeme řešit problémy, které jsme dosud vůbec řešit nedokázali.

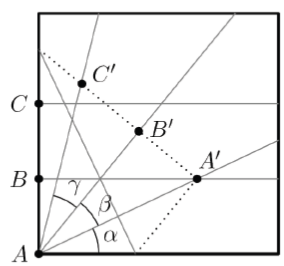
Druhým slavným starověkým geometrickým problémem je trisekce úhlu. Jde o problém rozdělit pouze pomocí pravítka a kružítka libovolný úhel na tři stejně velké úhly. My snadno umíme úhly půlit, zde je ale máme třetit. Opět až v 19. století bylo dokázáno, že to není možné. Idea důkazu je stejná, jen bylo dokázáno, že nelze nelze sestrojit $\cos\frac{\pi}{9}$, což je ekvivalentní k tomu, že nemůžeme roztřetit úhel o velikosti $\frac{\pi}{3}$.

My si zde opět ukážeme konstrukci, která opět nebude euklidovská, tentokrát bude založená na origami[5].

[5] Origami je prastaré umění skládání papíru pocházející z Japonska. Původně pouze skládání různých objektů má nyní i své aplikace v různých vědních oborech a to nejen v matematice. Origami se například využívá v medicíně při transportu implantátů cévami, v astronomii při dopravě solárního panelu k vesmírné stanici a podobně.



Pojďme dokázat, že skutečně takto můžeme roztřetit libovolný úhel. Zaveďme nejprve označení, jako je na obrázku níže.



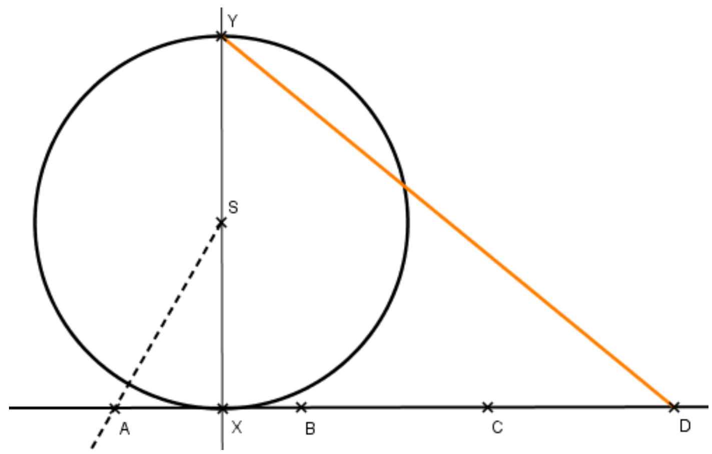
Zřejmě hrany, které by měly určovat třetiny úhlu θ, prochází bodem A. Z osmého obrázku „origami konstrukce“ plyne, že $\alpha = \beta$. Dokažme nyní, že jsou trojúhelníky $AA'B'$ a $AB'C'$ shodné. Z konstrukce provedené ve třetí obrázku dostáváme, že $|AB| = |BC|$ a tedy i $|A'B'| = |B'C'|$. Oba trojúhelníky mají společnou stranu AB'.

A konečně, z konstrukce provedené na pátém obrázku obdržíme, že hrana AB' je kolmá na $A'C'$. Podle věty SUS jsou tedy trojúhelníky $AA'B'$ a $AB'C'$ shodné. Tedy $\gamma = \beta = \alpha = \frac{\theta}{3}$.

Zopakujme ale, že toto byla konstrukce s využitím origami, nikoliv opět konstrukce euklidovská.

Posledním starověkým geometrickým problémem je kvadratura kruhu. Máme kruh s daným poloměrem a chtěli bychom sestrojit čtverec, který bude mít stejný obsah jako uvedený kruh. Má-li kruh poloměr 1, potřebujeme sestrojit úsečku délky $\sqrt{\pi}$. Obecně číslo π bylo pro matematiky velkou výzvou v každém období. Až v roce 1882 se podařilo německému matematikovi Ferdinandu von Lindemannovi dokázat, že číslo π je transcendentní, což znamená, že není kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty.

Po celo dobu, co se snažili matematici dokázat, že je π transcendentní, vznikaly přibližné konstrukce, jakým způsobem sestrojit číslo π. My si zde ukážeme jednu z těchto konstrukcí a to Kochańského rektifikaci, pojmenovanou po polském matematikovi Adamu Adamandy Kochańském.



Sestrojme kružnici se středem S a poloměrem 1 a vyznačme v ní libovolný průměr XY. V krajním bodě X sestrojíme tečnu a na ní najdeme bod A tak, aby $|\sphericalangle XSA| = \frac{\pi}{3}$. Potom sestrojme bod D na polopřímce AX tak, aby $|AD| = 3$.

Kochańský potom tvrdil, že délka úsečky DY je přibližně π.

Pojďme si délku úsečky DY vyjádřit přesně. Jistě $|XY| = 2$. Z trojúhelníku AXS vypočítáme, že $|AX| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Potom $|XD| = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9-\sqrt{3}}{3}$. Z Pythagorovy věty pak dostaneme, že

$$|DY| = \sqrt{4 + \frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}} = 3.1415333\ldots$$

Tedy od čísla π se toto číslo liší až na pozici statisícin.

$$\pi = 3.1415926\ldots$$

Je zajímavé, že ačkoliv ještě nebylo dokázáno, že jsou starověké geometrické problémy neřešitelné, odmítla pařížská akademie věd přijímat důkazy o tom, že to řešitelné je. Co je ještě zajímavější, že dodnes se někteří rekreační matematici pokusí zaslat důkaz řešitelnosti některého z uvedených problémů. Odborníci se pak snaží najít v jejich úvahách chybu.

Tímto opouštíme problémy z oblasti teorie čísel. Ukázali jsme si, že je to velmi široký obor matematiky, který nám může dát užitečné nástroje i do geometrie. V této kapitole jsme se zmínili o Velké Fermatově větě, prvočíselných dvojčatech, dokonalých číslech, Fermatových číslech, které nás zavedly na půdu geometrie. Starověké geometrické problémy pak byly naopak dokázány pomocí nástrojů teorie čísel. Je hezké, jak si mohou být jednotlivé oblasti matematiky nápomocny.

Kapitola 2

Problémy v diskrétní matematice a další problémy z geometrie

Diskrétní matematika je oblast matematiky, která mimo jiné v sobě zahrnuje kombinatoriku, teorii grafů, teorii her a třeba také teorii čísel. My se v této kapitole podíváme na problémy z oblasti teorie grafů a kombinatoriky.

Začněme teorií grafů. Jedná se o moderní oblast matematiky, která má široká uplatnění. Graf je množina vrcholů a hran mezi vrcholy.

Ony vrcholy mohou symbolizovat například města, hrany pak například silnice mezi městy. Dále pak mohou být vrcholy například autobusové a tramvajové zastávky a hrany cesty mezi nimi. Hrany mohou mít i číselná ohodnocení a můžeme například hledat nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy. K tomu máme řadu algoritmů, zmiňme například Dijkstrův. Dané ohodnocení může znamenat také kapacitu dané cesty nebo potrubí a můžeme zkoumat, kolik nejvíce dané suroviny můžeme přepravit danými cestami. Uplatnění teorie grafů jsou široká.

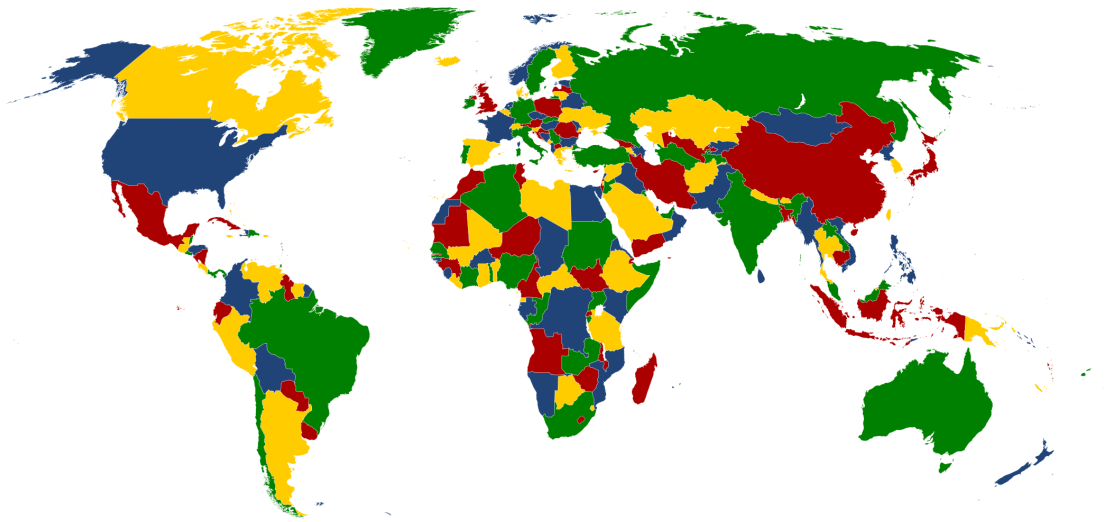
My si zde ukážeme jeden z nejznámějších problémů teorie grafů a to na problém čtyř barev.

2.1 Problém čtyř barev

V roce 1852 se Francis Guthrie pokusil obarvit mapu anglických oblastí a podařilo se mu to obarvit čtyřmi barvami tak, že žádné dvě sousední[1] oblasti neměly stejnou barvu. Položil si otázku, zda se mu to podaří u každého státu. Na obrázku vidíme například obarvení jednotlivých států světa.

Tato vcelku jednoduchá otázka zaujala matematiky a pokoušeli se dokázat, že tomu tak skutečně je. Kompletní důkaz nám dala ale až v roce 1976 dvojice matematiků Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Důkaz však využívá dlouhých výpočtů, kde pomoc počítače se prochází velké množství konfigurací, které nám mohou na mapě nastat. Právě díky tomu,

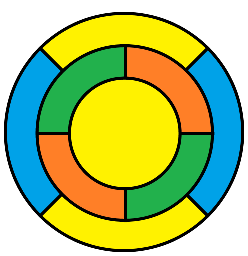
[1] Za sousední považujeme ty, které mají společnou hranici - nestačí tedy jeden bod.

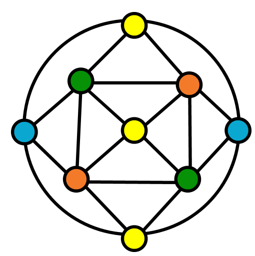


že se v důkazu využívá počítače, je některým matematikům trnem v oku a snaží se najít důkaz elegantnější.

A jak to souvisí s teorií grafů? Pokud si každý stát představíme jako vrchol a hranou spojíme ty vrcholy, které symbolizují dva sousední státy, převedeme problém barvení státu na barvení vrcholů daného grafu. Chceme tedy obarvit vrcholy grafu tak, aby žádné dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Poznamenejme, že vrcholům, které jsou spojené hranou, budeme říkat sousední vrcholy.

Na obrázku vidíme převod mezi mapou a grafem.





My si zde ukážeme, že dokážeme libovolnou mapu obarvit pomocí šesti barev. K tomu využijeme pozorování, že v každé mapě existuje stát, který má nejvýše pět sousedů. Toto tvrzení si nedokážeme, nicméně budeme ho potřebovat využít.

Věta 2.1.1. *Každou mapu v rovině dokážeme obarvit nejvýše šesti barvami tak, aby žádné dva sousední státy neměly stejnou barvu.*

Důkaz. Představme si danou mapu pomocí grafu a dokažme dané tvrzení matematickou indukcí vzhledem k počtu vrcholů.

1. Tvrzení zřejmě platí, je-li počet vrcholů menší nebo roven šesti. Každou oblast obarvíme jednou barvou a máme hotovo. Bázový krok je tedy triviální.

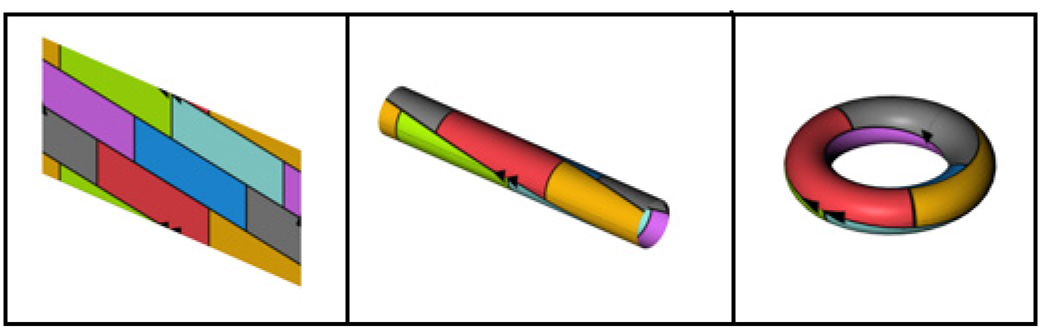
2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy mající $1, 2, 3, \ldots k$ vrcholů. Tedy předpokládejme, že každý graf reprezentující rovinnou mapu mající k a méně vrcholů můžeme obarvit nejvýše 6 barvami.

3. Dokazujme nyní pro graf (mapu) mající $k+1$ vrcholů (oblastí - států). V úvodu před touto větou jsme si řekli, že v každé mapě existuje stát mající nejvýše pět sousedů. Tento stát reprezentuje nějaký vrchol, kterému říkejme v. Podle indukčního předpokladu můžeme obarvit zbytek mapy (kromě vrcholu v) šesti barvami. Vrchol v má nejvýše pět sousedů, tedy ho můžeme obarvit zbývající barvou. A máme graf obarvený šesti barvami.

□

Podobným způsobem by se dalo dokázat, že lze každou mapu obarvit pěti barvami. Důkaz by byl jen technicky náročnější, protože pokud by měl vrchol v celkem 5 sousedů, nelze ho tak jednoduše obarvit, jako jsme to udělali v předchozím důkazu.

Zajímavou otázkou je, pokud bychom chtěli kreslit mapy nikoliv do roviny, ale na jiné plochy. Pokud například uvážíme torus (anuloid), což si můžeme představit jako donut, nebo pneumatiku, bude potřeba na obarvení vždy nejvýše 7 barev. Ukažme si příklad mapy, na kterou je potřeba skutečně 7 barev.

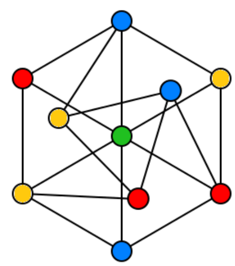


Na prvním obrázku je list, na kterém jsou nakresleny jednotlivé oblasti a jsou obarvené oranžově, červeně, světle modře, tmavě modře, fialově, zeleně a šedě. List stočíme do roury, což vidíme na druhém obrázku. Poté rouru zatočíme dokola a slepíme a dostaneme torus (anuloid). Každá z barevných oblastí sousedí s ostatními. Tedy na tuto mapu je skutečně potřeba 7 barev. To, že nám ale stačí vždy 7 barev, si však nedokážeme.

Pojďme se podívat na další problém související s barvením grafů. Dosud jsme se bavili o barvení map. Tedy se nám hrany příslušného grafu nemohly křížit. Takovýmto grafům říkáme, že jsou rovinné. Příkladem grafu, který není rovinný, tedy ho nedokážeme nakreslit bez křížení hran, je graf označován K_5 a nazýván úplný graf na pěti vrcholech. Ten si můžeme představit jako pětici vrcholů, přičemž hranou jsou spojeny každá dva vrcholy. Jak to ale vypadá s barvením některých grafů, které nemusí být rovinné rovinné? Zde je bohužel odpověď mnohdy ještě nenalezna.

2.2 Hadwiger–Nelsonův problém

Hadwiger–Nelsonův problém se týká grafů, ve kterých je vzdálenost každých dvou sousedních vrcholů rovna 1. Otázkou je, kolika nejméně barvami můžeme obarvit vrcholy takovýchto grafů, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Na obrázku vidíte graf se sedmi vrcholy, na jehož obarvení stačí 4 barvy.

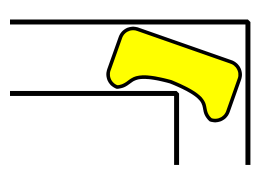


Bylo dokázáno, že odpovědí je jedno z čísel 4, 5, 6, nebo 7. Zajímavé také je, pokud bychom tento problém rozšířili do trojdimenzionálního prostoru, opět bychom nevěděli, kolik nejméně barev je potřeba. Zde je dokázáno, že bude nutné 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, nebo 15 barev.

Od barvení grafů se přesuňme ke geometrii. Ačkoliv by se mohlo zdát, že euklidovská geometrie je již natolik probádaným oborem, že nevyřešené problémy budou velmi komplikované, opak je pravdou. Ukažme si několik příkladů.

2.3 Gaučový problém

S tímto problémem se již setkal asi každý. Stěhujete nábytek a přemýšlíte, jak máte s danou skříní, či s gaučem, projít chodbou přes daný roh. Tuto otázku si také položili matematici a zajímalo je, jaký největší obsah může mít rovinný útvar, se kterým projdete chodbou ve tvaru písmene L.

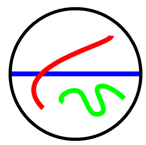


Pokud bude šířka chodby 1, říkejme maximálnímu obsahu útvaru, se kterým projdete chodbou, gaučová konstanta. Britský matematik John Hammersley nalezl gauč s obsahem $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \doteq 2,2074$. Také se mu podařilo dokázat, že gaučová konstanta je nejvýše $2 \cdot \sqrt{2} \doteq 2,8284$. Bohužel, dosud se nikomu nepodařilo dokázat, jaký bude skutečně ten největší obsah.

Obsahu nějakého útvaru se týká i další nevyřešený problém.

2.4 Červí problém

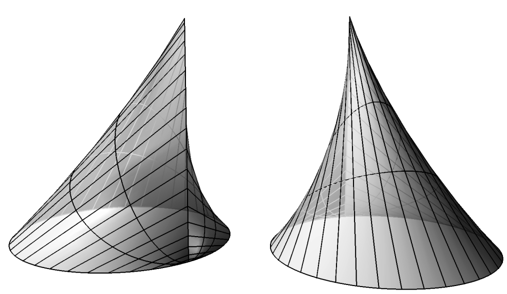
Tento problém formuloval roku 1966 rakousko-kanadský matematika Leo Moser. Předtavme si, že máme nějakou spojitou rovinnou křivku, která má délku 1. Příkladem může být úsečka, půlkružnice nebo nějaká vlnka, ale délky 1. Leo Moser si položil otázku, jaký bude minimální obsah útvaru, do kterého se vejde jakákoliv takováto křivka délky 1.



Snadno se vidí, že každá takováto křivka se vejde do kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$. Taktéž je možné použít kosočtverec s vnitřnímu úhly $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{2\pi}{3}$, který bude mít úhlopříčku dlouhou 1. Toto však rozhodně nejsou nejmenší možné útvary. A tak nám tato otázka zůstává nezodpovězena.

2.5 Sítě

Další geometrický problém se týká sítí těles. Víme, že některá tělesa mají síť, jiná nemají. Tělesům, která mají síť, říkáme rozvinutelná. Jejich příkladem je třeba krychle, jehlan a další. Příkladem tělesa, které nemá síť, je třeba kulová plocha či již zmíněný anuloid. Dalšími takovými tělesy mohou být třeba konoidy. Ty se velmi často využívají ve stavebnictví k zastřešení různých objektů. Jedním takovým příkladem je Küperův konoid, který vidíme na obrázku.

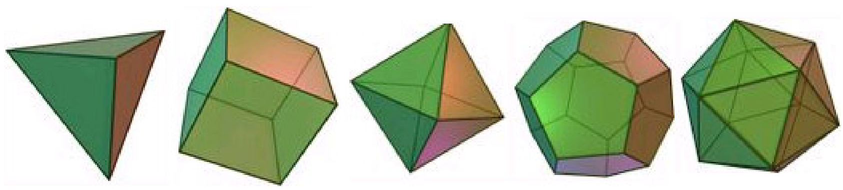


Takovýchto těles je kolem nás spoustu. Jen člověka málokdy napadne se na ně podívat okem matematika. Nás ale protentokrát nebudou zajímat plochy užívané ve stavebnictví a v architektuře, ale podíváme se na tělesa hranatá.

Jedním typem takovýchto těles jsou pravidelná tělesa. Těmito tělesy se zabýval již Platón a tak jim někdy říkáme platónská. Platónským tělesem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky, pro který platí, že v každém vrcholu se sbíhá stejný počet stěn. Následující tvrzení nám popisuje všechny pravidelné mnohostěny.

Věta 2.5.1. *Existuje právě pět platónských těles. Jsou to pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn.*

Důkaz. Uvažujme pravidelné mnohoúhelníky, které mohu být stěnami platónských těles. V jednom vrcholu se může sejít nejvýše 5 rovnostranných trojúhelníků, jinak by už nevytvořily prostorové těleso, nejvýše 3 čtverce i pětiúhelníky. Tři šestiúhelníky by již nevytvořily prostorové těleso. Pro 3 trojúhelníky dostáváme pravidelný čtyřstěn, pro 4 trojúhelníky pravidelný osmistěn, pro 5 trojúhelníku dvacetistěn. Pro čtverce máme krychli a konečně pro pětiúhelníky máme pravidelný dvanáctistěn. □



Platónských těles se týká spousta zajímavých tvrzení. Zmiňme například, že pokud spojíme hranami středy sousedních stěn pravidelných mnohostěnů, dostaneme vždy opět pravidelný mnohostěn. Takto vzniklým tělesům říkáme duální tělesa. Ke krychli je duální osmistěn, k osmistěnu krychle, k dvanáctistěnu dvacetistěn, k dvacetistěnu dvanáctistěn a ke čtyřstěnu čtyřstěn.

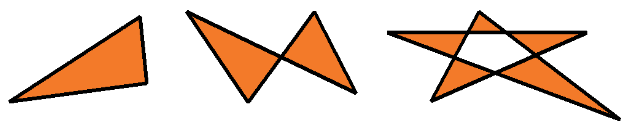
U všech platónských těles můžeme sestrojit jejich síť. Na obrázku vidíte například síť dvanáctistěnu a dvacetistěnu.

Roku 1975 si britský matematik Geoffrey Colin Shephard položil otázku, zda každý konvexní mnohostěn má svoji síť, tedy zda každý konvexní mnohostěn dokážeme složit z jednoho kusu papíru. Tato otázka je bohužel dosud nezodpovězena a velmi často se jí říká Dürerova domněnka. Opět je to velmi jednoduchý problém na pochopení, který je však dosud nevyřešen.

Další dva problémy se budou týkat oblasti matematiky, které se říká kombinatorická geometrie. Ta se nás například ptá na otázky, na kolik částí nám může rozdělit rovinu několik útvarů, v kolika bodech se protínají dané křivky, či kolika útvary můžeme pokrýt (překrýt) jiný útvar.

2.6 Trojúhelníkový problém

Kobon Fujimura formuloval následující problém: Kolik nejvýše nepřekrývajících se trojúhelníků dokážeme vytvořit pomocí n úseček? Na obrázku vidíme, jak to vypadá pro $n = 3$, $n = 4$ a $n = 5$. Snadno se ověří, že na více trojúhelníků se nám to v ani jednom případě nepodaří.

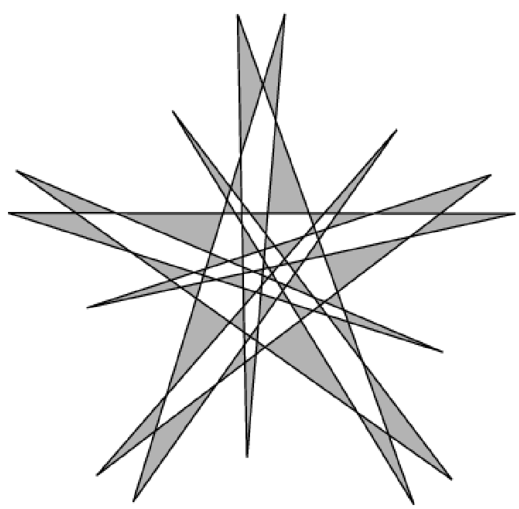


Jak je to ale s větším počtem přímek? To bohužel dosud není známo. Zmiňme se jen, že Saburo Tamura dokázal, že počet trojúhelníků, které lze vytvořit pomocí n přímek, není větší než

$$\left\lfloor \frac{n \cdot (n-2)}{3} \right\rfloor,$$

kde symbolem $\lfloor a \rfloor$ značíme dolní celou část reálného čísla a, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovné a.

V roce 2005 T. Suzuki vytvořil z 15 přímek celkem 65 trojúhelníků. Z předchozího vztahu plyne, že je to skutečně maximální počet.

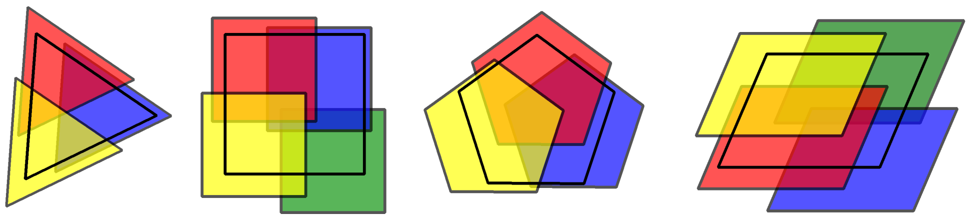


2.7 Hadwigerova domněnka

Dalším problémem kombinatorické geometrie je pokrývání. Představme si, že máme rovnostranný trojúhelník. Ten se nám podaří překrýt pomocí tří menších rovnostranných trojúhelníků. Dva nám jistě nestačí, protože zde máme tři strany původního trojúhelníku a na pokrytí každé z nich potřebujeme nejméně dva menší trojúhelníky.

Obdobně můžeme uvažovat čtverce. Na ty nutně potřebujeme čtyři menší čtverce. Jak to vypadá obecně? Kolik menších útvarů potřebujeme na pokrytí daného konvexního útvaru?

Hadwiger (a na něm také nezávisle Levi) formuloval svoji domněnku, že každý konvexní útvar v n dimenzionálním prostoru lze pokrýt nejvýše pomocí 2^n menších kopií daného útvaru.



Pro $n = 2$ máme situaci v rovině. Právě Levi v roce 1955 dokázal, že každý konvexní útvar v rovině můžeme pokrýt pomocí čtyř menších kopií.

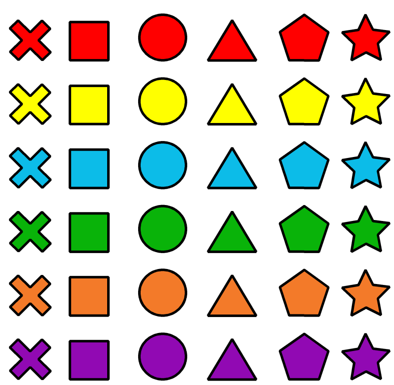
Již ale v třírozměrném prostoru je situace dosud neobjasněná. Bylo dokázáno, že každý konvexní útvar v prostoru můžeme pokrýt pomocí šestnácti menších kopií, nicméně Hadwigerova domněnka hovoří o osmi.

Přes kombinatorickou geometrii se dostáváme k problému ryze kombinatorickému. V poslední části si budeme povídat o problému 36 důstojníků.

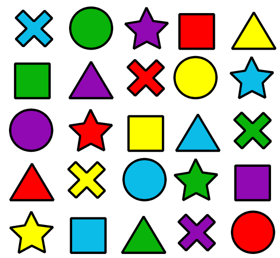
2.8 Problém 36 důstojníků

Problém 36 důstojníků formuloval Leonard Euler a jde o to, že máme uspořádat 36 důstojníků šesti různých pluků a 6 různých hodností do čtverce 6×6 tak, aby v každá řadě i každém sloupci byli důstojníci všech hodností i všech pluků.

Symbolicky můžeme tuto úlohy vyjádřit pomocí geometrických útvarů. Máme je sestavit do čtverce tak, aby v každém řádku i každém sloupci byl zastoupen každý útvar i každá barva.



Euler se domníval, že takovéto uspořádání není možné. Domníval se, že nikdy se mu nepodaří uspořádat n^2 důstojníků n různých hodností z n pluků daným způsobem pro žádná přirozená čísla, která dávají po dělení čtyřmi zbytek dvě. Nicméně se mu to nepodařilo dokázat. Na obrázku můžeme vidět, že pokud bychom měli 25 důstojníků, 5 různých pluků a pěti různých hodností, potom by se nám je podařilo uspořádat do čtverce tak, aby v každém řádku a v každém sloupci byla zastoupena každá hodnost i každý pluk.



Úloha o 36 důstojnících má úzkou souvislost s latinskými čtverci. Latinský čtverec řádu n je tabulka mající n řádků a n sloupců, ve které jsou vepsány číslice od 1 do n tak, aby v každém řádku a každém sloupci bylo každé číslo právě jednou.

Je vidět, že pro každé přirozené číslo n existuje latinský čtverec řádu n. Stačí totiž do prvního řádku zapsat čísla od 1 do n vzestupně, do druhého řádku začít psát od dvojky do n a na konec dát jedničku. A každý další řádek opět o jedna posunout.

Představme si nyní dvě latinské čtverce třetího řádu, jako je vidíme na obrázku. Pokud je nyní spojíme v jeden, bude zde každá dvojice čísel právě jednou.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	2	1
2	3	1

$$\begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

Takovýmto latinským čtvercům říkáme, že jsou ortogonální. Je zde vidět i souvislost s problémem 36 důstojníků. V této úloze totiž hledáme dva ortogonální latinské čtverce šestého řádu (jeden symbolizuje hodnost, druhý pluk). Jak jsme již zmínili, Euler se domníval, že neexistují dva ortogonální latinské čtverce pro žádné přirozené číslo n tvaru $4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Až v roce 1960 se podařilo dokázat, že Eulerova domněnka byla chybná. Existují totiž dva ortogonální latinské čtverce pro každé přirozené číslo n s výjimkou $n = 6$ a $n = 2$.

Na závěr našeho povídání ještě poznamenejme, že latinské čtverce se využívají při šifrování ke kontrolám přenesených kódů.

Závěr

A co říci závěrem? Seznámili jsme se s některými otevřenými a některými nedávno vyřešenými problémy matematiky. Takovýchto problému je velké množství, ať už v teorii čísel, v teorii grafů, v kombinatorice, ale i v dalších oborech jako je algebra či matematická analýza. Matematika se tedy nikterak neliší od ostatní věd. Také objevuje nové a nové skutečnosti, čímž zase nastoluje další a další otázky. Jen se matematice nevěnuje tolik pozornosti a přesto ji každý den využíváme, když posíláme peníze z účtu na účet, když se přihlašujeme ke svému mailovému či facebookovému účtu, když hledáme nejrychlejší spoj do školy. Díváme se, jak kolem nás rostou nové a nové budovy, vkládáme i půjčujeme si peníze od různých finančních institucí, obdivujeme genialitu gotických architektů. Svět kolem nás je plný matematiky, jen se stačí dobře podívat. A ačkoliv může být matematika obtížná a náročná, to ji rozhodně neubírá na její kráse. Ba naopak. A i přes její obtížnost jsme si zde dokázali představit dosud nevyřešené problémy...

No a co dále? V závěrečné lekci se podíváme, jak se matematika dostala do svých krizí a jak se z nich opět dostala. Také se podíváme na důkazy prazvláštních tvrzení, která určitě neplatí, přesto se nám je podaří dokázat. Samozřejmě si vše nakonec řádně zdůvodníme.

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_mathematics.