



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt „Vzdělávání dotykem“

CZ.1.07/1.3.00/51.0031



## NETRADIČNÍ FORMY VÝUKY V MATEMATICE – VYUŽITÍ ICT

Autor: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

# Obsah

Obsah.....	2
Úvodní slovo realizačního týmu .....	3
Cíle kurzu .....	5
1. Úvod .....	6
2. Prezentace matematiky s využitím GeoGebry .....	7
2.1. Spontánní stereometrie a GeoGebra .....	7
2.1.1 Geometrické těleso .....	7
2.1.2 Sítě těles .....	11
2.1.3 Pohyb tělesa .....	12
2.1.4 Kombinatorická geometrie těles .....	14
2.2. Planimetrie a GeoGebra .....	15
2.3. Stereometrie a GeoGebra .....	18
2.4. Prostorová analytická geometrie a GeoGebra .....	21
2.5. Matematická analýza a GeoGebra .....	22
2.6. Algebra a GeoGebra .....	23
3. Freewarový program GeoGebra .....	24
3.1. O programu GeoGebra .....	24
3.2. GeoGebra v češtině .....	26
3.3. Verze a prostředí GeoGebry .....	26
4. Workshop .....	29
5. Závěr .....	30
6. Zdroje .....	31

## Úvodní slovo realizačního týmu

Cílem projektu Vzdělávání dotykem je především inovovat IC zařízení ve školách pro zefektivnění výuky. V 21. století se IC neodmyslitelně stává součástí výuky na všech stupních škol. V žádném případě nemá toto zařízení sloužit k nahrazení standardní výuky, ale cílem je tuto výuku především inovovat a zefektivnit. Dnešní IC technika dokáže přitáhnout a motivovat žáky k předmětům, které nepatří mezi oblíbené pro svoji složitost. Pokud učitel dokáže propojit klasickou výuku s informačními technologiemi, může se i z neoblíbeného předmětu stát populární.

Uvědomujeme si, že využívání moderních IC zařízení klade na učitele nemalé nároky, a jedinou možností, jak v tomto obstát, je neustálé vzdělávání se. Proto jsme do tohoto projektu zařadili i množství kurzů, které jsme koncipovali tak, abychom co nejvíce pomohli učitelům se získáním praktických dovedností v této oblasti.

Kurzy jsme rozdělili do 4 vzdělávacích oblastí. První je zaměřena na problematiku zadávání veřejných zakázek při pořizování ICT zařízení do škol, druhá aktivita je zaměřena na obecné znalosti ovládnutí ICT, včetně ochrany autorských práv a nebezpečí počítačové kriminality a kyberšikan. Třetí a čtvrtá aktivita jsou již plně zaměřeny na využití ICT ve školách. Učitelé mají možnost seznámit se s využitím ICT technologií při vedení elektronických dokumentů, s tvorbou elektronických výukových materiálů, včetně jejich ukládání na virtuální uložení. Dále se pedagogové seznámí s možnostmi využití ICT zařízení při výuce cizích jazyků, matematiky, českého jazyka, odborných a přírodopisných předmětů.

Kurzy jsou koncipovány a přizpůsobeny vždy dané škole, protože jsme si vědomi, že existují značné rozdíly ve vybavenosti škol ICT zařízeními a technických znalostí jednotlivých učitelů.

Cílem výukového materiálu není komplexní shrnutí dané problematiky, ale především shrnutí obecných informací, na kterých je možné dále stavět. Je důležité připomenout, že ICT technologie jdou neustále dopředu a pokud chce učitel využívat tato zařízení ve své výuce, je nutné se v této oblasti neustále vzdělávat.

Věříme, že tímto projektem pomůžeme učitelům v aplikaci ICT do výuky a usnadníme jim tuto nelehkou práci.

*Realizační tým Centra vzdělanosti Libereckého kraje, p. o.*

## Cíle kurzu

Kurz „Netradiční formy výuky v matematice – využití IC“ bude rozdělen na dvě části. První část kurzu bude věnována prezentaci vybraných úloh z různých kapitol matematiky za využití programu GeoGebra 2D a GeoGebra 3D. Náplní druhé části kurzu bude představení freewareového geometrického programu GeoGebra a seznámení se s uživatelským prostředím tohoto programu. Druhá část kurzu bude zakončena workshopem, ve kterém si budou účastníci kurzu moci vyzkoušet řešení zadaných či tvorbu vlastních rovinných, ale i prostorových úloh v programu GeoGebra nainstalovaném na projektových tabletech či noteboocích.

## 1. Úvod

Program GeoGebra je možné užít velmi efektivně při výuce různých matematických disciplín jako např. při výuce spontánní stereometrie; planimetrie či stereometrie - v programu je totiž velmi snadné přepnutí mezi 2D a 3D módem; dále pak při výuce rovinné či prostorové analytické geometrie; matematické analýzy; algebry apod.

Vzhledem ke skutečnosti, že GeoGebra je freewarový program, je možné jej při výuce volně využívat bez potřeby zakoupení drahých multilicencí, jako je tomu u komerčních softwarů. Žáci či studenti si jej mohou též nainstalovat na své domácí PC a používat jej tak i k procvičování doma. V současné době již existují applety programu GeoGebra pro interaktivní tabule a pro tablety. Vývojáři programu pracují nepřetržitě na vylepšování programu GeoGebra, ale také na appletech GeoGebry pro mobilní telefony. GeoGebrou je tedy možné používat na různých ICT zařízeních a na různých místech s možností připojení k internetu, neboť je k její správné funkčnosti potřeba Java. K práci s GeoGebrou není tedy potřeba návštěvy počítačové učebny. Je jí možno užívat v běžných třídách.

Ovládání GeoGebry je velmi intuitivní, lze v ní „přeskakovat“ mezi různými okny, tj. mezi algebraickým oknem, CAS (Computer Algebra System) oknem, 2D či 3D geometrickým oknem či tabulkou. GeoGebra obsahuje velkou řadu příkazů a různých nástrojů, jejichž užití zajistí uživatelům vytvoření či vyřešení velkého množství úloh. Některé takové úlohy jsou společně s některými potřebnými funkcemi programu GeoGebra představeny v nadcházející kapitole.

## 2. Prezentace matematiky s využitím GeoGebry

### 2.1. Spontánní stereometrie a GeoGebra

GeoGebru lze s výhodou užít při vytváření zadání, ale především i při názorných ukázkách řešení příkladů spontánní stereometrie. V této podkapitole dodržuji částečné členění spontánní stereometrie dle knihy [1] prof. Hejného. Pro vybraná témata spontánní stereometrie uvádím pro ilustraci některé netradiční stereometrické úlohy.

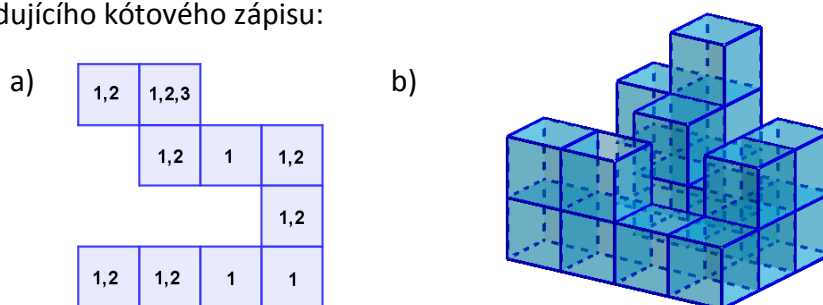
Grafická znázornění zadání, resp. řešení jednotlivých úloh spontánní stereometrie jsou vymodelována v programu GeoGebra. Některá řešení jsou v GeoGebře vytvořena v dynamické podobě za užití dynamických nástrojů programu. Do textu jsou ale vložena staticky (analogicky tak tomu bude i u některých úloh v ostatních kapitolách věnovaných dalším matematickým disciplínám). Během vyučovacích hodin může učitel žákům/studentům pouštět dynamické applety zobrazených prostorových situací přímo z programu GeoGebra, anebo je může spouštět z internetových prohlížečů v podobě exportovaných html souborů z programu GeoGebra. Učitel tak může studentům přiblížit prostorovou scénu zobrazující zadání, ev. řešení úlohy dle potřeby, z takového úhlu pohledu, který je pro žáky/studenty nejnázornější, atd.

#### 2.1.1 Geometrické těleso

Část spontánní stereometrie nazvaná *Geometrické těleso* je věnovaná modelování těles podle obrázku či předlohy; zobrazování těles ve volném rovnoběžném promítání (VRP), pomocí kótového zápisu, půdorysem nárysem a bokorysem; skládání a rozkládání těles; ...

### Úloha 2.1.1:

Pomocí kostek vymodelujte a posléze ve VRP zobrazte krychlové těleso zapsané pomocí následujícího kótového zápisu:

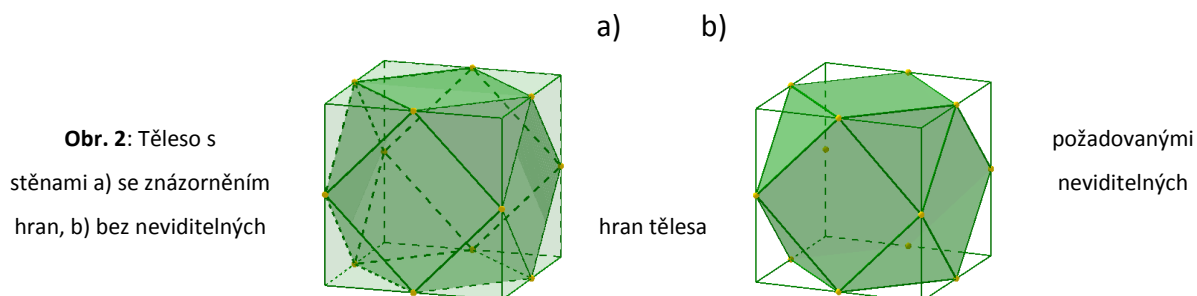


**Obr. 1:** a) Kótový zápis krychlového tělesa (zadání); b) zobrazení krychlového tělesa ve VRP (řešení)

### Úloha 2.1.2:

Ve VRP zobrazte těleso, jehož šesti stěnami jsou čtverce ležící ve stěnách krychle a zbývajících osmi stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky.

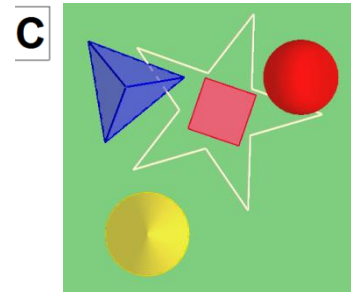
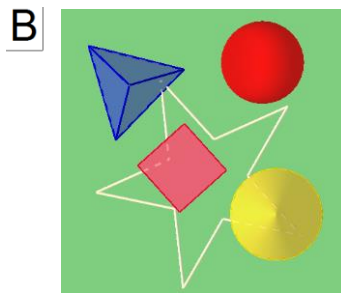
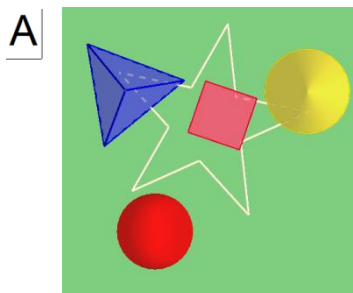
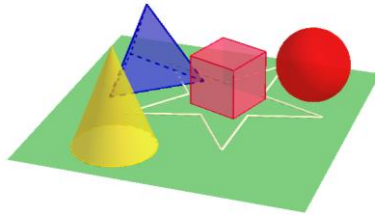
**Řešení:** Nejprve zobrazíme krychli ve VRP. Uvědomíme-li si, že stěnami nově vzniklého tělesa mají být čtverce, ležící ve stěnách původní krychle, a rovnostranné trojúhelníky, je zřejmé, že čtvercové stěny nově vznikajícího tělesa nemohou splývat se stěnami původní krychle. Musí být tedy nějakým způsobem natočeny. Připomeneme-li si, že zbývajících stěnami mají být rovnostranné trojúhelníky, dojdeme k závěru, že vrcholy čtvercových stěn nově vznikajícího tělesa budou středy hran původní krychle. Hledané těleso je znázorněno na obr. 2.





### Úloha 2.1.3: (Z ptačí perspektivy)

Který ze tří obrázků odpovídá pohledu na sestavu objektů shora?

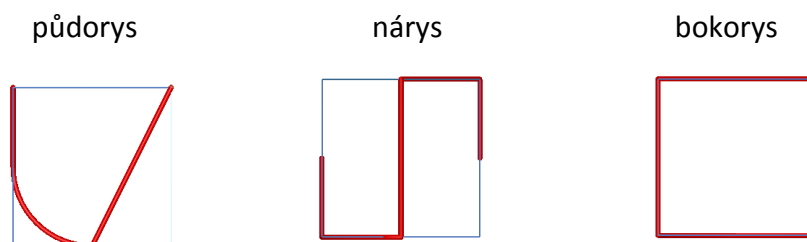


Obr. 3: Sestava objektů; A, B, C – tři pohledy na sestavu shora (tři půdorysy sestavy)

**Řešení:** Správným pohledem na danou sestavu shora je pohled C, což lze velmi snadno ověřit pohybem jednotlivých scén v programu GeoGebra 3D.

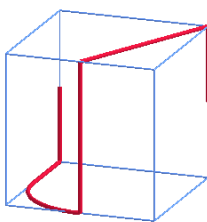
### Úloha 2.1.4:

Je dána skleněná krychle a na ní je přilepena červená stuha. Je dán půdorys (pohled shora), nárys (pohled zepředu) a bokorys (pohled z boku) dané krychle. Přilepenou stuhu zakreslete na krychli zobrazenou ve VRP.



Obr. 4: Půdorys, nárys a bokorys skleněné krychle s přilepenou červenou stuhou

**Řešení:** Řešení úlohy je jednoznačné a je zobrazeno na obr. 5.

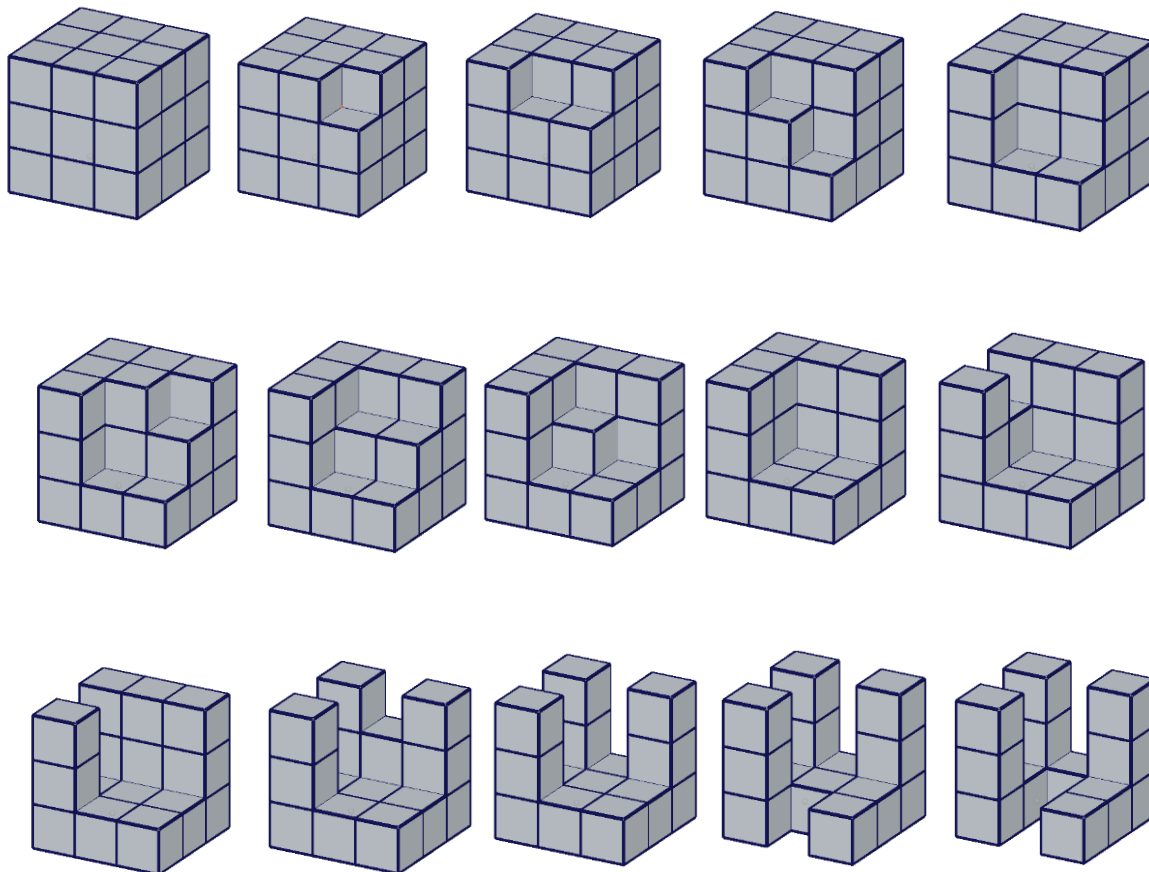


**Obr. 5:** Skleněná krychle ve VRP s přilepenou červenou stuhou

### **Úloha 2.1.5:**

Rozhodněte, zda je možné odebrat z krychle složené z 27 menších shodných krychlí 1 krychli, 2 krychle, ... 14 krychlí tak, aby vzniklá krychlová tělesa měla stejný povrch jako má původní krychle. Pro každou ze 14 možností nakreslete nově vzniklé krychlové těleso ve VRP.

**Řešení:** Původní krychle má povrch složený z  $6 \times 9 = 54$  stěn menších krychlí. A také všechna krychlová tělesa na obr. 6 mají svůj povrch tvořený z 54 stěn menších krychlí. Odebereme-li z velké krychle jednu menší krychli, která tvoří povrch velké krychle třemi svými stěnami, povrch nově vzniklého krychlového tělesa je dorovnán stejným počtem stěn, které se po odebrání menší krychle odkryly. A proto vždy, když odebereme menší krychli, která se před svým odejmutím dotýkala krychlového tělesa právě třemi svými stěnami, zůstal povrch nově vzniklého krychlového tělesa stejný, jako byl povrch předcházejícího krychlového tělesa, tedy jako byl povrch původní krychle. Jednotlivá krychlová tělesa ve VRP jsou pomocí programu GeoGebra 3D zobrazena na obr. 6.



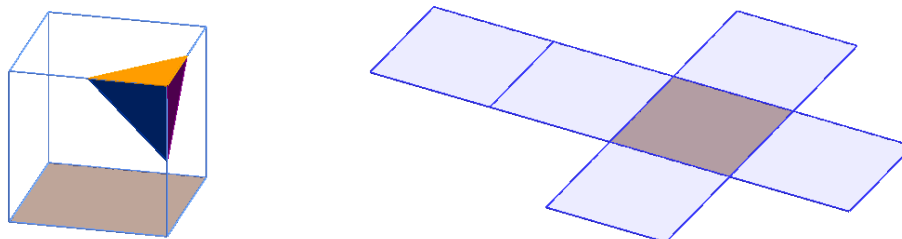
Obr. 6: Jednotlivá krychlová tělesa rozebraná dle daného pravidla

### 2.1.2 Sítě těles

Část spontánní stereometrie nazvaná *Sítě těles* se zabývá tvorbou sítí těles; konstrukcemi těles ze sítí; manipulacemi se sítěmi těles; ...

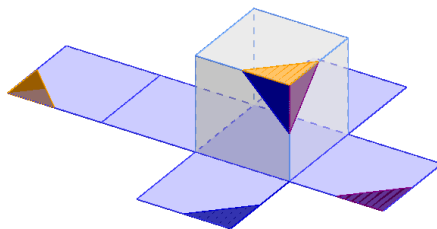
#### Úloha 2.1.6: (zakreslení prvků do sítě)

Na obrázku je znázorněna krychle s barevným značením (trojúhelníky) na vybraných stěnách. Dále je znázorněna síť krychle, v níž je označena dolní podstava krychle. Do sítě doplňte barevně označené objekty (trojúhelníky) dané krychle.



Obr. 7: Krychle včetně barevně vyznačených objektů a prázdné sítě

**Řešení:** Pomocí nástroje „Síť“ programu GeoGebra 3D lze danou krychli rozložit v síť. Krychle se rozvine do své sítě, ale na rozdíl např. od programu Cabri 3D bez barevně vyznačených objektů, ty musí uživatel do sítě zakreslit sám manuálně – viz obr. 8.



**Obr. 8:** Krychle včetně barevně vyznačených objektů; síť krychle s barevně vyznačenými objekty

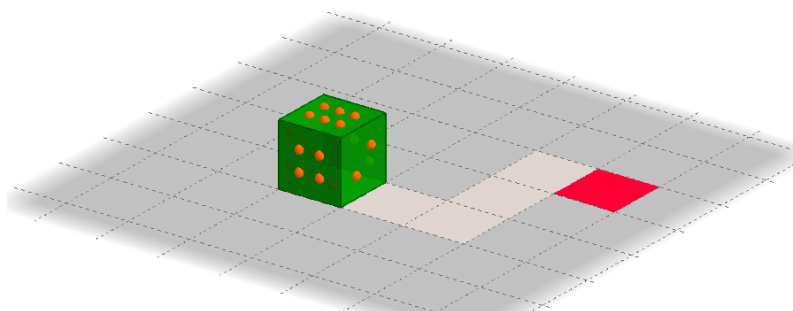
### 2.1.3 Pohyb tělesa

Část spontánní stereometrie nazvaná *Pohyb tělesa* se věnuje otáčení tělesa; odvalování tělesa, zápisu pohybu odvalování tělesa; stopě vytvořené odvalováním tělesa nebo odvalováním části tělesa; protahování tělesa různě tvarovanými otvory ...

Pomocí dynamických nástrojů programu GeoGebra je možné vytvořit dynamický obrázek, ve kterém se krychle na základě užití posuvníků a na základě definované konstrukce sama pohybuje.

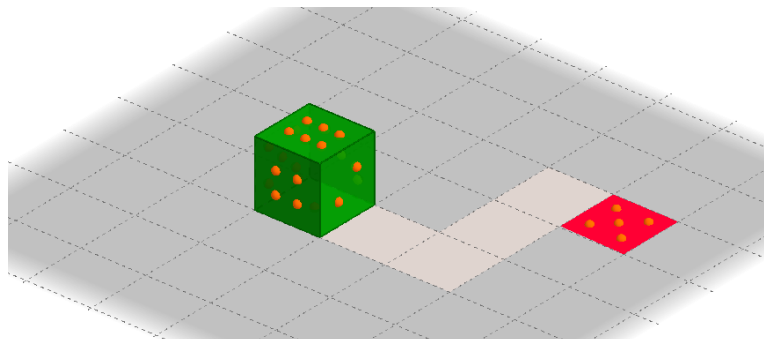
#### **Úloha 2.1.7:**

Hrací kostka má stěny označené od 1 do 6, přičemž součet bodů protějších stěn je vždy 7. Krychli odvalte po vyznačené cestě. Do červeného políčka vepište, kolik bodů bude na spodní stěně krychle po jejím odvalení na toto políčko.



**Obr. 9:** Hrací kostka a plán odvalování

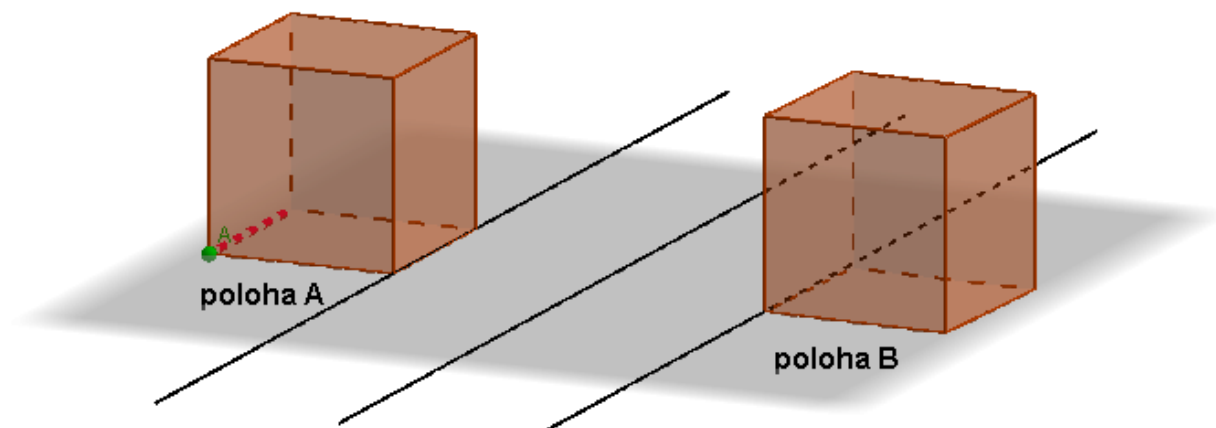
**Řešení:** Na spodní stěně krychle bude po jejím odvalení po vyznačené cestě na červeném políčku 5 bodů. Při užití dynamických nástrojů GeoGebry je možné po částech zobrazovat proces odvalování krychle po vyznačené cestě.



**Obr. 10:** Znárodnění výsledného počtu bodů, které se objeví na spodní stěně krychle po jejím odvalení po dané cestě

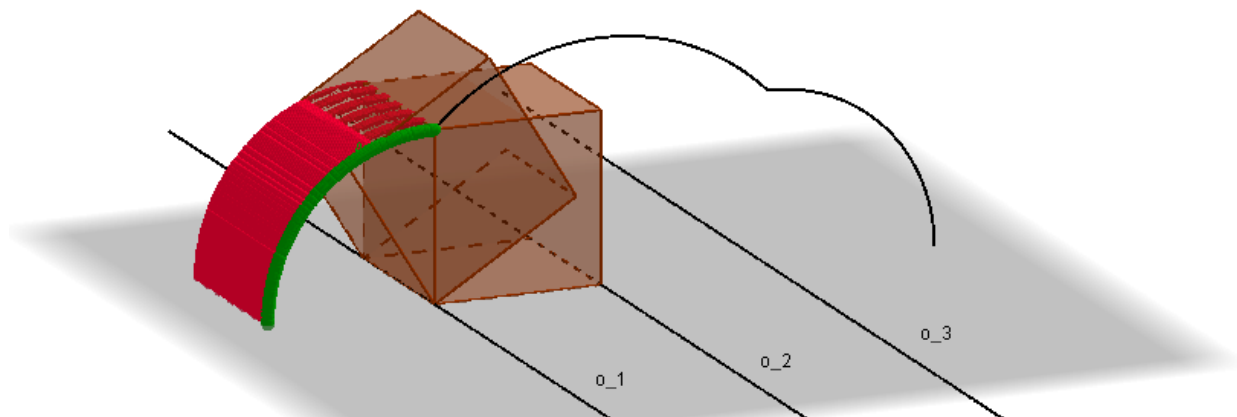
**Úloha 2.1.8:** (stopa vytvořená odvalováním části tělesa)

Po rovné podložce se má přemístit krychlová bedna postupným odvalováním z polohy A do polohy B. Graficky znázorněte, jak se při odvalování bude pohybovat hrana  $h$ .



**Obr. 11:** Počáteční (A) a koncová (B) poloha krychlové bedny

**Řešení:** Řešení příkladu je spojené s otáčením tělesa kolem přímky v prostoru. Odvalení bedny z polohy A do polohy B tedy znamená postupné odvalení (otočení) krychle o  $90^\circ$  kolem  $o_1, o_2, o_3$  – viz obr. 12. Část stopy hrany  $h$  dané krychle je znázorněna červenou barvou; část stopy krajního bodu hrany  $h$  je vykreslena zelenou čtvrtkružnicí.



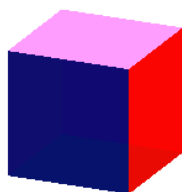
**Obr. 12:** Část výsledné stopy vzniklé odvalováním hrany  $h$  krychle z polohy  $A$  do polohy  $B$

### 2.1.4 Kombinatorická geometrie těles

Část spontánní stereometrie nazvaná *Kombinatorická geometrie těles* se věnuje vybarvování hran tělesa; vybarvování stěn tělesa; kombinatorickým hrám; ...

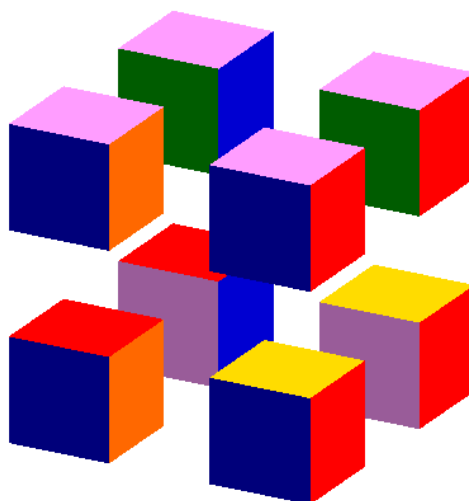
#### **Úloha 2.1.9: (kombinatorická hra – šestibarevná krychle majora Mac Mahona)**

Hra majora Mac Mahona se skládá z 30 stejně velkých krychlí, jejichž stěny jsou natřeny šesti barvami. Každá krychle má jednu stěnu oranžovou, druhou červenou, třetí růžovou, čtvrtou žlutou, pátou modrou a šestou zelenou. Přitom se každé dvě krychle z této hry od sebe liší zbarvením stěn. Z 30 krychlí zvolíme libovolně jednu, která se nazývá předloha – viz obr. 13. Ze zbývajících 29 krychlí vyberte 8 krychlí a z nich složte větší krychli obarvenou tak, jak je zbarvena předloha. Při skládání se však krychle mohou navzájem dotýkat vždy jen stejně zbarvenými stěnami. Tzn. má-li např. jedna ze základních krychlí horní stěnu žlutou a klademe-li na ni další krychli, smí být spodní stěna této krychle opět pouze žlutá.



**Obr. 13:** Libovolně zvolená šestibarevná krychle - předloha

**Řešení:** Správné řešení šestibarevné krychle majora Mac Mahona je znázorněno na obr. 14.



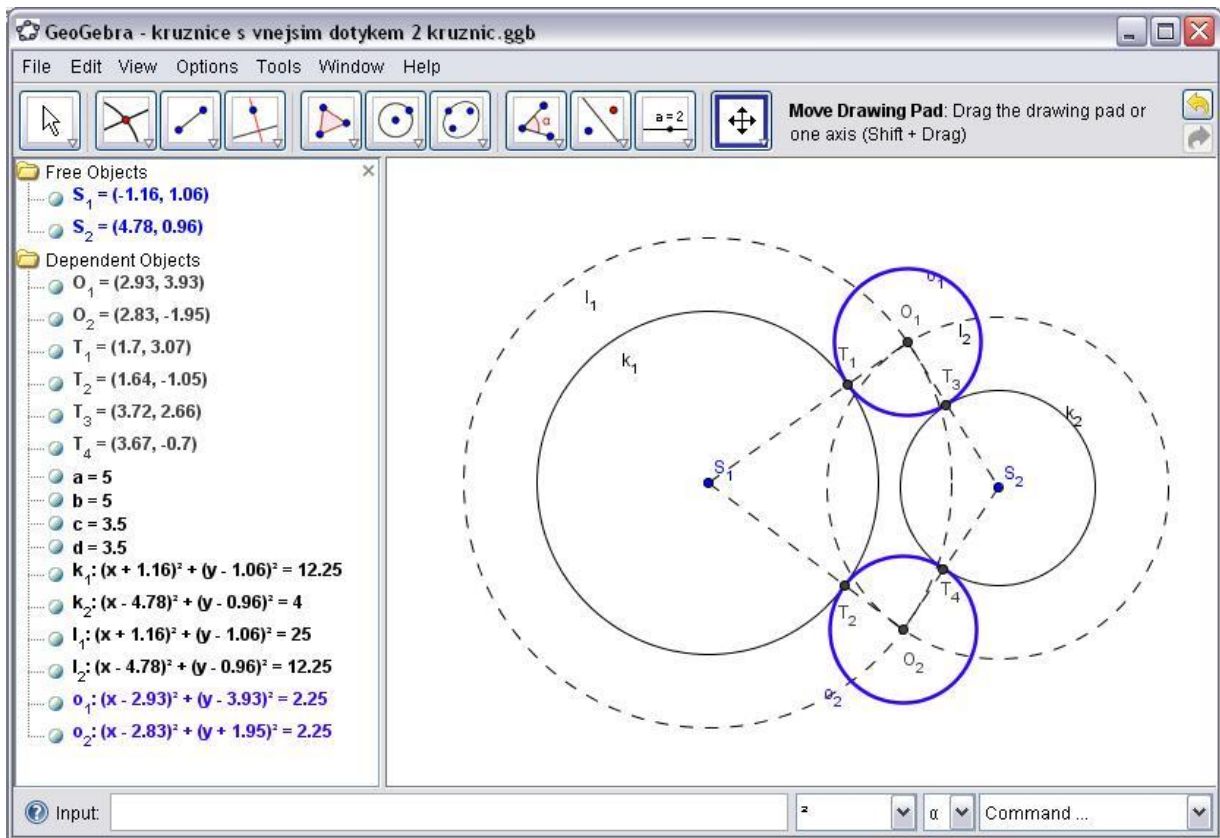
**Obr. 14:** Šestibarevná krychle majora Mac Mahona složená dle předlohy (viz obr. 13)

## 2.2. Planimetrie a GeoGebra

2D mód programu GeoGebra lze s výhodou užívat při výuce planimetrie a to nejen při řešení klasických planimetrických školních úloh (viz úloha 2.2.1), ale např. i při zařazování objektů z reálného života do výuky (viz úloha 2.2.2, která je vhodná např. pro užití v tabletu či na interaktivní tabuli). Do programu GeoGebra je totiž možné vkládat jakékoliv obrázky umístěné buď na pevném disku počítače či na internetu. Vkládání obrázků a možná manipulace s nimi (např. provádění různých rovinných transformací) dovoluje obohatit výuku planimetrie o užívání nejen geometrických objektů, ale i věcí z reálného života.

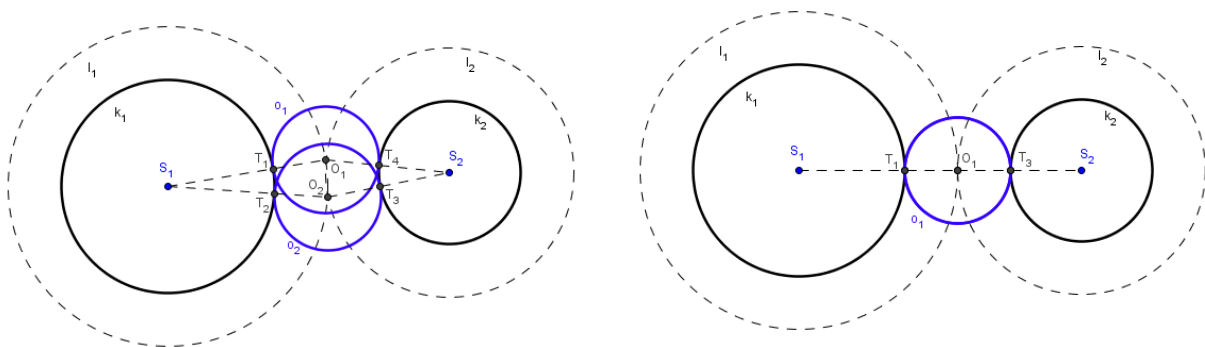
### Úloha 2.2.1:

Sestrojte kružnici  $o$  s daným poloměrem  $r_0 = 1.5$ , která se dotýká vně dvou daných kružnic  $k_1 = (S_1, r_1 = 3.5)$  a  $k_2 = (S_2, r_2 = 2)$ .



Obr. 15: Zobrazení řešení problému v programu GeoGebra

Díky užití dynamických nástrojů programu GeoGebra lze vidět možnosti řešení daného problému.



Obr. 16: Užití dynamických nástrojů programu GeoGebra

Program GeoGebra automaticky generuje zápis konstrukce pod názvem *Protokol konstrukce*. V otevřeném okně je také možné nechat přehrát konstrukci krok po kroku.



01\_kruznice dotykající se dvou kružnic vne.ggb

Soubor Úpravy Zobrazit Nastavení Nástroje Okno Nápověda

Algebraické okno

Zápis konstrukce

Č.	Název	Definice	Hodnota
1	Bod $S_1$		$S_1 = (0.02, 1.04)$
2	Bod $S_2$		$S_2 = (6.84, 0.88)$
3	Kružnice $k_1$	Kružnice se středem $S_1$ a poloměrem 3	$k_1: (x - 0.02)^2 + (y - 1.04)^2 = 9$
4	Kružnice $k_2$	Kružnice se středem $S_2$ a poloměrem 2	$k_2: (x - 6.84)^2 + (y - 0.88)^2 = 4$
5	Kružnice $l_1$	Kružnice se středem $S_1$ a poloměrem 4.5	$l_1: (x - 0.02)^2 + (y - 1.04)^2 = 20.25$
6	Kružnice $l_2$	Kružnice se středem $S_2$ a poloměrem 3.5	$l_2: (x - 6.84)^2 + (y - 0.88)^2 = 12.25$
7	Bod $O_1$	Průsečík $l_1, l_2$	$O_1 = (4.06, 3.01)$
7	Bod $O_2$	Průsečík $l_1, l_2$	$O_2 = (3.97, -1.12)$
8	Úsečka a	Úsečka $[S_1, O_2]$	a = 4.5
9	Úsečka b	Úsečka $[O_2, S_2]$	b = 3.5

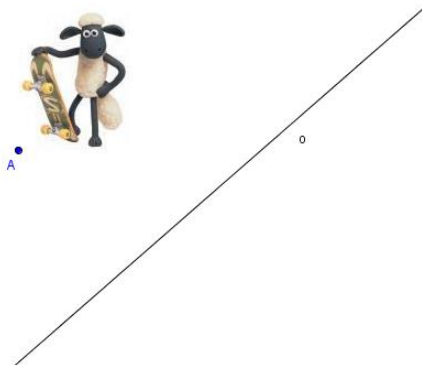
17 / 17

Obr. 17: Protokol konstrukce automaticky vygenerovaný programem GeoGebra

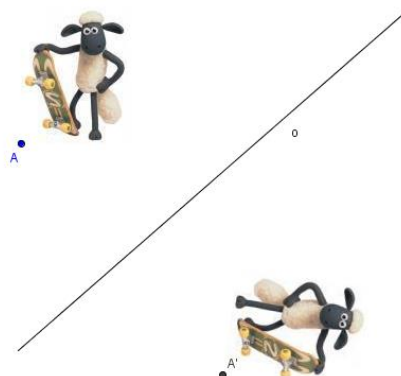
### Úloha 2.2.2:

a) V osové souměrnosti s osou  $o$  zobrazte ovečku Shaun.

Zadání:



Řešení:



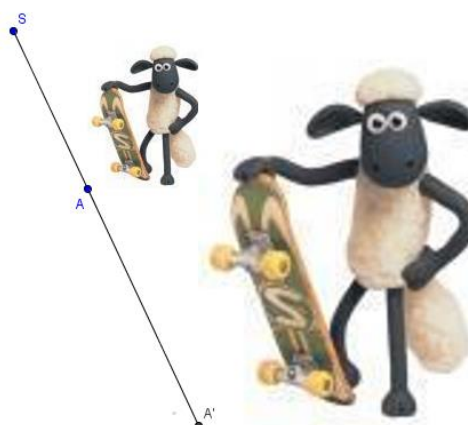
Obr. 18: Zadání a řešení sestrojení osově souměrného útvaru

b) Ve stejnohlosti se středem  $S$  a s koeficientem stejnohlosti  $k = 2.5$  zobrazte ovečku Shaun.

Zadání:



Řešení:

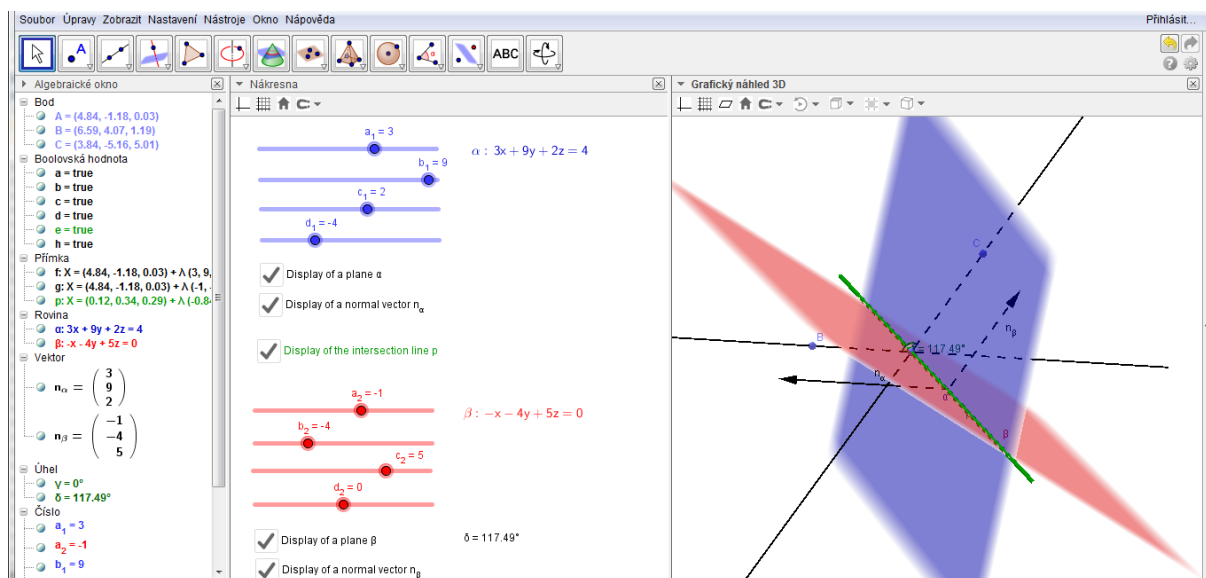


Obr. 19: Zadání a řešení sestrojení stejnohlého útvaru

### 2.3. Stereometrie a GeoGebra

3D mód programu GeoGebra umožňuje vytvářet a řešit stereometrické úlohy od základních stereometrických úloh týkajících se axiomatizace výstavby stereometrie (viz úloha 2.3.1), přes řezy těles obecnou rovinou (viz úloha 2.3.2) až např. po hledání průsečíků přímky s tělesy (viz úloha 2.3.3).

**Úloha 2.3.1:** Určete úhel, který svírají roviny  $\alpha$  a  $\beta$ .

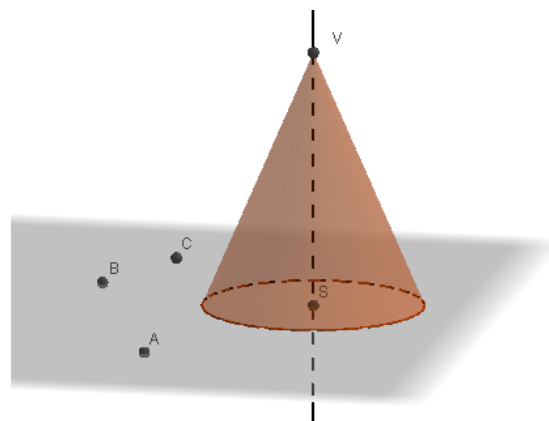


Obr. 20: Grafické řešení nalezení úhlu, který svírají dvě dané různoběžné roviny

Při řešení úlohy je v programu GeoGebra užito posuvníků pro možnost změny parametrů v obecných rovnicích obou daných rovin. Obecné rovnice rovin jsou společně s posuvníky zobrazeny v nákresně. Hodnoty parametrů v nich se mění automaticky dle změn hodnot posuvníků. V nákresně jsou dále umístěna zaškrťovací políčka, která umožňují zobrazení či skrytí zakreslených rovin, jejich normálových vektorů a jejich průsečnice ve 3D okně. V nákresně, stejně jako ve 3D okně mezi zobrazenými normálovými vektory se se změnou hodnot parametrů zobrazuje aktuální hodnota úhlu mezi oběma danými rovinami. Veškeré dané i počítané hodnoty se také současně v odpovídajících (zvolených) barvách zobrazují v algebraickém okně programu.

### **Úloha 2.3.2:**

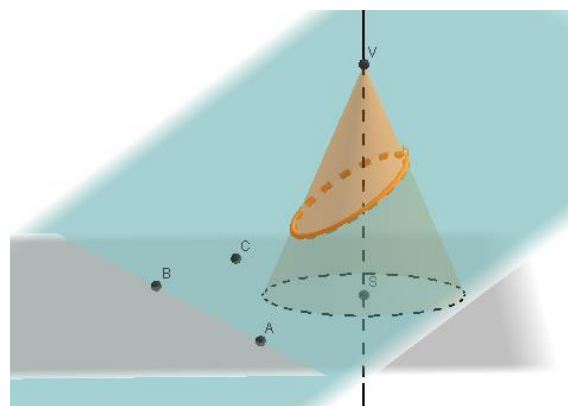
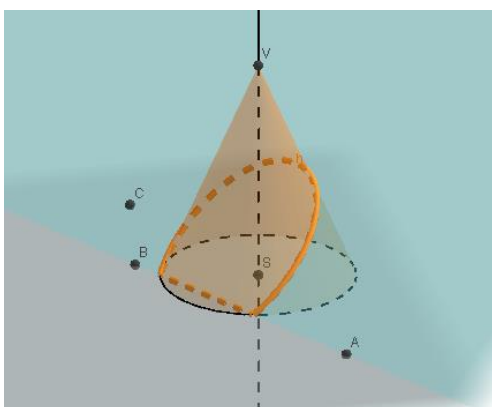
Sestrojte řez kužele rovinou  $\alpha = ABC$ . Body  $A, B$  leží v rovině podstavy kužele, viz obr. 21.



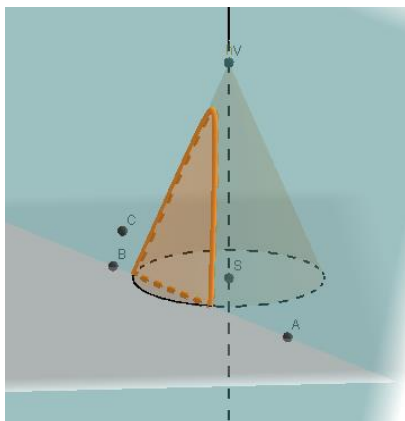
**Obr. 21:** Grafické zadání úlohy

### **Řešení:**

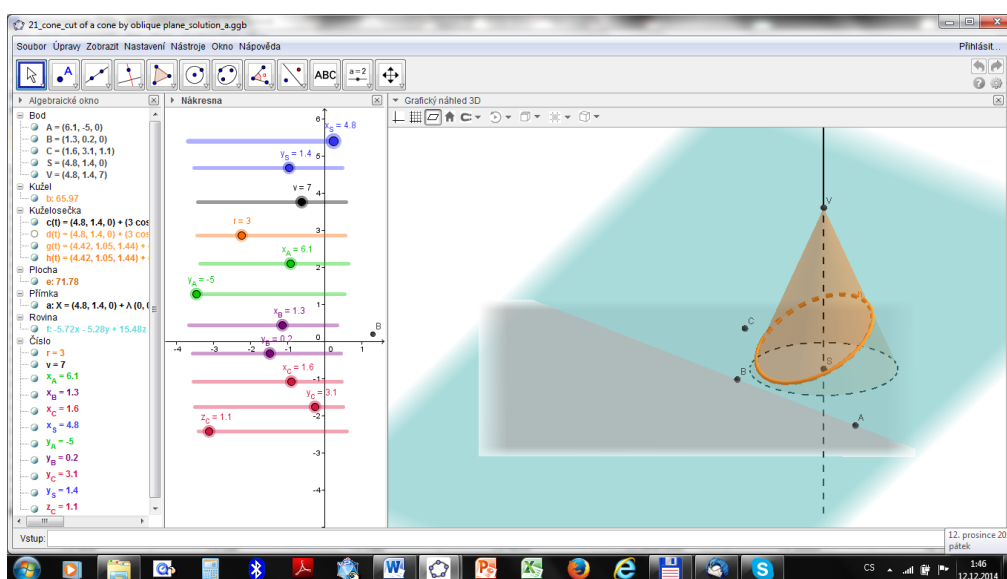
Na následujících obrázcích jsou na základě různých umístění bodů  $A, B, C$  v prostoru zobrazeny různé tvary řezu roviny  $\alpha = ABC$  s povrchem kužele.



**Obr. 22:** Grafické řešení úlohy – řezem kužele danou rovinou  $\alpha = ABC$  je a) elipsa, b) část elipsy



**Obr. 23:** Grafické řešení úlohy – řezem kužele danou rovinou  $\alpha = ABC$  je parabola



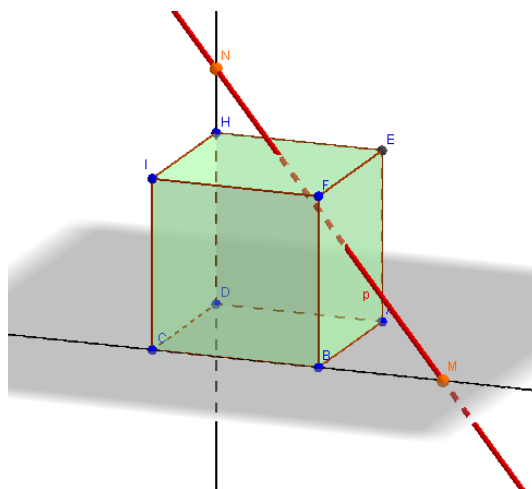
**Obr. 24:** Grafické řešení úlohy včetně zobrazení posuvníků v nákrešně

I při řešení této úlohy je v programu GeoGebra užito posuvníků pro možnost změny parametrů tentokrát souřadnic daných bodů  $A, B, C$ , které tvoří rovinu  $\alpha$ . V závislosti na jejich nastavení je řezem dané roviny a kužele buď elipsa (ve speciálním případě kružnice), nebo parabola, ev. hyperbola. Posuvníky jsou také užity pro zobrazení kužele. Je možno měnit souřadnice středu kužele, výšku kužele a poloměr jeho podstavné kružnice.

Díky těmto dynamickým možnostem programu studenti v malém okamžiku vidí, co je průnikovými křivkami roviny řezu s daným kuželem.

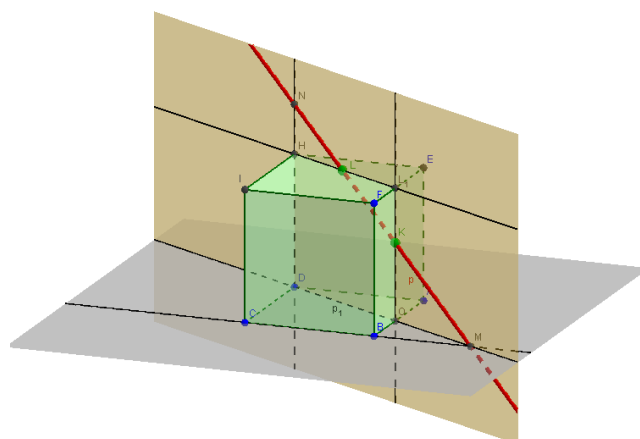
### Úloha 2.3.3:

Určete průsečíky přímky  $p = MN$  s povrchem dané krychle  $ABCDEFGH$ . Zadání viz obr. 25.



Obr. 25: Grafické zadání úlohy nalezení průsečíků přímky s povrchem krychle

**Řešení:** Úlohu řešíme za pomoci programu GeoGebra prostorově. Řešení úlohy znázorňuje obr. 26.



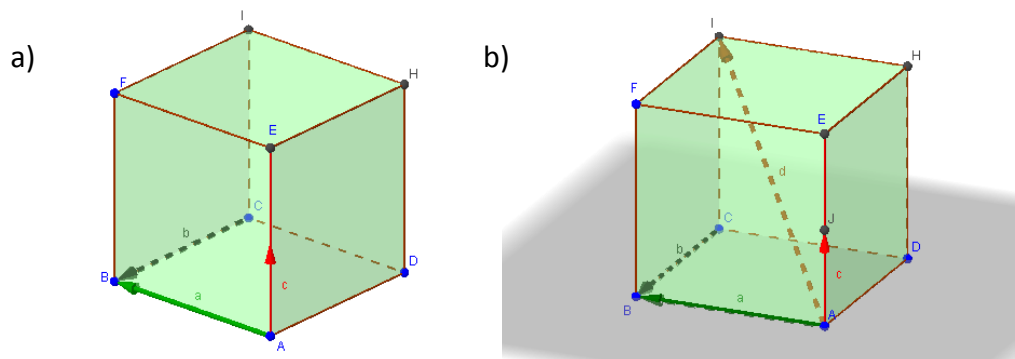
Obr. 26: Grafické řešení úlohy nalezení průsečíků  $K, L$  přímky  $p$  s povrchem krychle  $ABCDEFGH$

## 2.4. Prostorová analytická geometrie a GeoGebra

3D mód programu GeoGebra nabízí také mimo jiné možnost použití pro názorné zobrazení úloh prostorové analytické geometrie. Počítání s vektory v prostoru je pro studenty mnohdy abstraktní. Program GeoGebra a především vykreslení prostorových vektorů, ev. bodů, přímek a rovin v prostoru, polohových či metrických úloh vycházejících ze základních prostorových objektů v tomto programu umožňuje studentům lépe proniknout do principů prostorové analytické geometrie a také snáze porozumět tomu, co vlastně počítají a především proč a jak. Na ukázkou uveďme jednu velmi jednoduchou úlohu.

### Úloha 2.4.1:

Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Označme hranu  $AB$  jako vektor  $\mathbf{a}$ , hranu  $CB$  jako vektor  $\mathbf{b}$  a hranu  $AE$  jako vektor  $\mathbf{c}$ . Viz obr. 27a. Do obrázku zakreslete vektor  $\mathbf{d}$ , který je výsledkem lineární kombinace vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , tj.  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ .



Obr. 27: Grafické zadání a řešení úlohy určení vektoru jako výsledku lineární kombinace daných vektorů

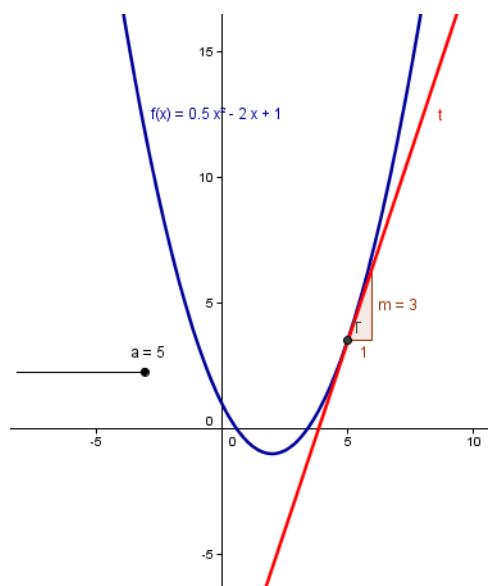
## 2.5. Matematická analýza a GeoGebra

Program GeoGebra disponuje také mnoha různými funkcemi matematické analýzy. Je v něm možné velmi snadno (pouze zadáním funkčního předpisu) vykreslovat grafy funkcí jedné reálné proměnné (ve 3D módu už i dvou reálných proměnných). GeoGebra obsahuje velkou řadou předdefinovaných vlastností funkcí, které lze při výpočtech aplikovat – např. zjišťování nulových bodů grafů funkcí, hledání asymptot funkcí, extrémů, inflexních bodů, apod. K daným funkcím je také možno určit jejich derivace či na druhou stranu jejich primitivní funkce a mnohé další.

V následující úloze si ukážeme jednu z možných aplikací některých definovaných příkazů matematické analýzy. Použijeme též dynamického nástroje GeoGebry – posuvníku.

### Úloha 2.5.1:

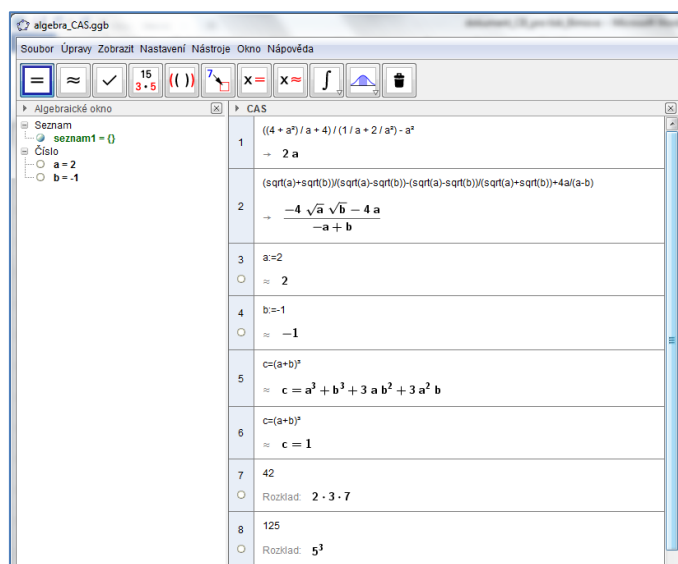
V programu GeoGebra sestrojte graf funkce  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ . Sestrojte tečnu  $t$  k funkci  $f(x)$  v bodě  $T$   $[5, 3.5]$ . Sestrojte směrnici tečny  $t$  k funkci  $f(x)$  v jejím libovolném bodě  $T$ . Užitím posuvníku ukažte dynamičnost změny tečny  $t$  dotýkající se dané funkce  $f(x)$  v jejím libovolném bodě  $T$ .



Obr. 28: Grafické řešení úlohy – graf kvadratické funkce včetně směrnice i tečny sestavených v jejím bodě  $T$

## 2.6. Algebra a GeoGebra

Součástí nových verzí programu GeoGebra je tzv. CAS okno. V tomto okně lze pomocí příkazů programu např. zjednodušovat algebraické výrazy, či rozkládat čísla složená na součin prvočinitelů, atd. Program též umí pracovat s polynomy, násobit je, dosazovat do nich konkrétní hodnoty a mnohé další.



Obr. 29: Ukázka CAS okna programu

## 3. Freewarový program GeoGebra

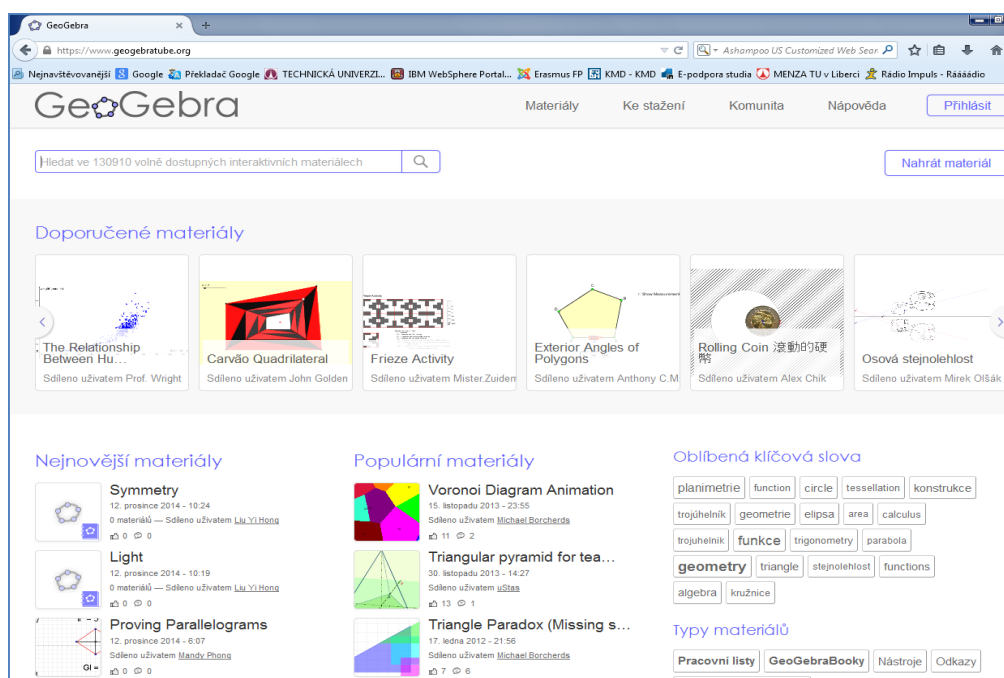
V této kapitole ve stručnosti představím program GeoGebra a následně i jeho prostředí.

### 3.1. O programu GeoGebra

GeoGebra je dynamický matematický program, který spojuje geometrii, algebru a matematickou analýzu. Je to program, který byl původně vytvořen pro účely vyučování a učení se matematice na základních a středních školách. GeoGebra je vyvíjena od roku 2001 jako Open Source program Markem Hohenwarterem, studentem a později doktorandem univerzity v Salzburku, Rakousko. Markus Hohenwarter působí od roku 2007 v USA na Univerzitě Florida Atlantic a společně s týmem programátorů stále pracuje na zdokonalování a vývoji programu.

GeoGebra je evaluována rakouským ministerstvem školství, které několikrát udělilo grant na další vývoj programu. GeoGebra získala řadu ocenění jak v Rakousku a v Německu, tak i v dalších evropských zemích.

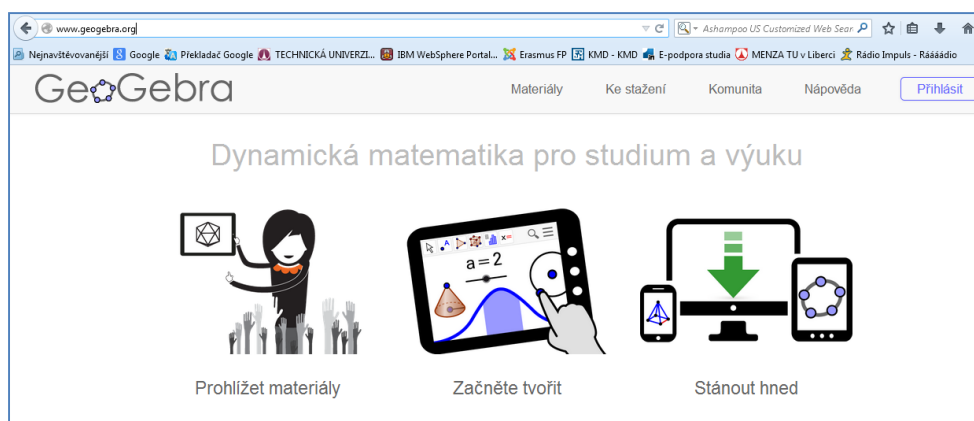
GeoGebra představuje zajímavou alternativu komerčních programů. Vzhledem k rostoucí komunitě jejích příznivců je již k dispozici celá řada materiálů (tzv. GeoGebra Tutorials) využitelných v různých oblastech školské matematiky. Materiály je možné stáhnout po bezplatném zaregistrování se do tzv. GeoGebraTube (viz obr. 30)



Obr. 30: Ukázka webové stránky GeoGebraTube (<https://www.geogebra.org/>)

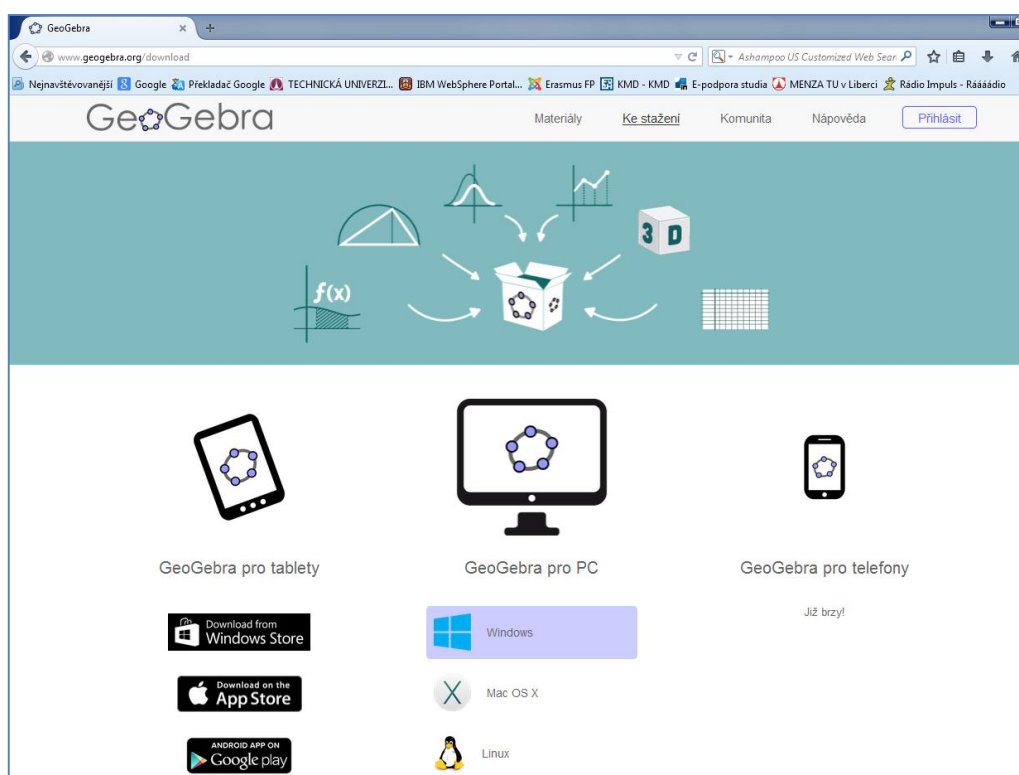


Oficiální stránky programu GeoGebra naleznete na adrese <http://www.geogebra.org>.



**Obr. 31:** Ukázka oficiální webové stránky programu GeoGebra (<http://www.geogebra.org/>)

Samotný program GeoGebra (aktuální verze 5-0-49-0 ke dni 12.12.2014) je možné stáhnout na internetové adrese <http://www.geogebra.org/download>.



**Obr. 32:** Ukázka webové stránky, na které je možné program GeoGebra stáhnout

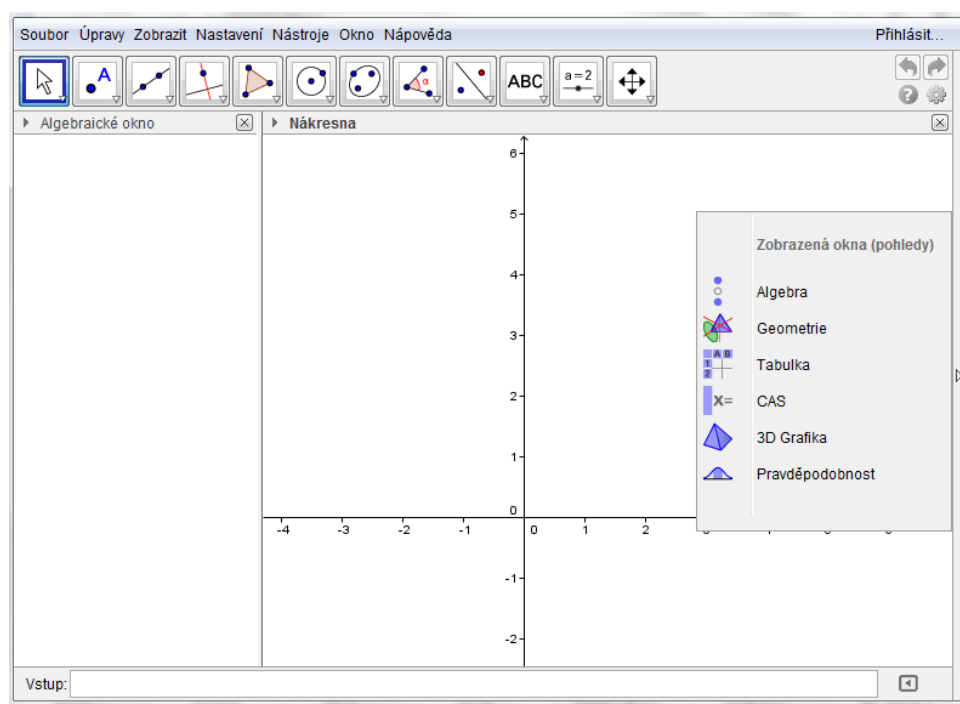
GeoGebra vyžaduje prostředí nejaktuálnější verze Javy, jejíž instalace se při stahování GeoGebry v případě potřeby sama nabídne.

## 3.2. GeoGebra v češtině

Po své instalaci se program GeoGebra spustí automaticky v anglické verzi. Nastavení českého prostředí se provede z hlavního menu *Options / Language / A – G / Czech*. Program se v okamžiku zobrazí v českém jazyce a pak též při každém jeho dalším spuštění. Jednou z výhod programu GeoGebra že může být ta skutečnost, že jej lze užívat ve 45 různých jazycích.

## 3.3. Verze a prostředí GeoGebry

Existuje již mnoho verzí programu a to GeoGebra od verze 3.0, přes verze 4. x až po verze 5-0-y-0. Verze programu s číslicemi 3 a 4 na začátku jsou verze GeoGebry s 2D módem. Ve verzích 5-0-y-0 se už jedná o GeoGebru s 3D módem. Po delší dobu existovala GeoGebra 3D ve zkušební verzi, od letošního roku byla ale již spuštěna plně funkční verze GeoGebry 3D.



Obr. 33: Ukázka základního prostředí programu GeoGebra 5-0-y-0

V závislosti na verzi programu se měnilo také jeho prostředí. Základní prostředí programu GeoGebra 5-0-y-0 je složeno z (e):

- lišty hlavního nabídkového menu
- nástrojové lišty s ikonami konstrukcí, ev. dalších funkcí programu (každá ikona pod sebou skrývá řadu různých konstrukcí, pomocí nichž lze konstruovat body, přímky,

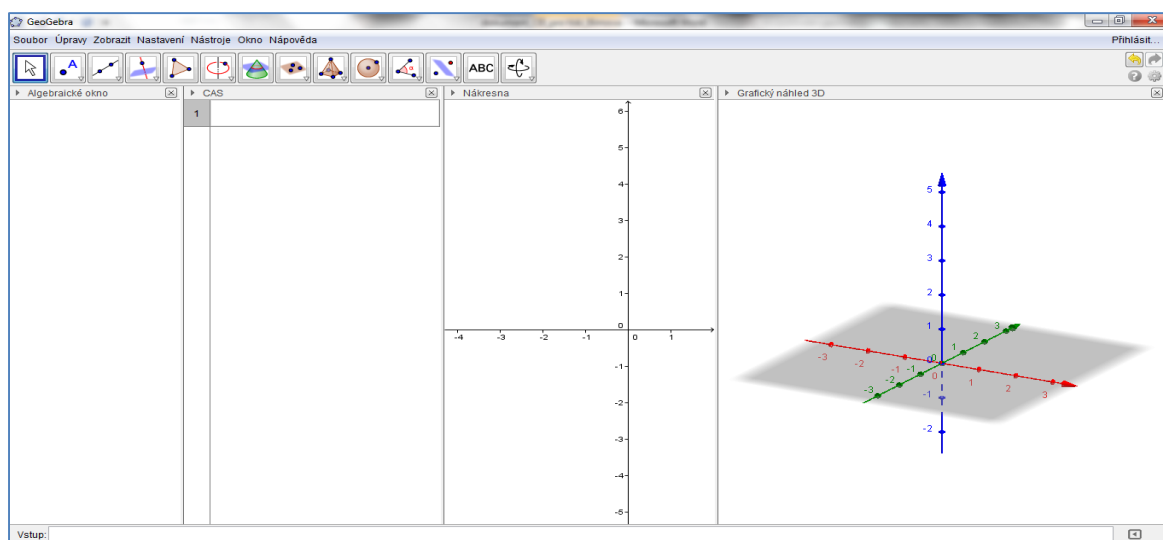
úsečky, vektory, kružnice, kuželosečky, přímky kolmé či rovnoběžné, rovinu, mnohoúhelníky a jiné)

- ikon „zpět“ a „znovu“, ikon „nápořvedy“ a „nastavení“ programu (obojí v pravé části nástrojové lišty)
- algebraického okna
- geometrického okna (nákresna)
- vstupního pole (příkazový řádek)
- vstupních příkazů – písmena řecké abecedy, matematické symboly, apod.

Pracovní plocha programu je po spuštění nastavena na algebraické prostředí. To lze snadno zrušit nebo obnovit z hlavního menu – *Zobrazit / Mřížka*.

Program též umožňuje rozličná nastavení z hlavního menu – *Nastavení*. Týkají se změn grafického prostředí a výstupů číselných hodnot, jako jsou jednotky úhlů, počet desetinných míst, způsob zobrazení souřadnic, bodů, či vyznačení pravého úhlu, apod.

Na obr. 33 je vidět, jak se při spuštění programu otevírá navíc ještě tzv. plovoucí okno, ve kterém se uživateli ukazují možnosti otevření dalších oken programu. Na obr. 34 je oproti základnímu prostředí otevřeno navíc ještě CAS okno a 3D geometrické okno. Na obr. 33 jsou v nástrojové liště ukázány ikony pro 2D konstrukce a na obr. 34 pro 3D konstrukce. Ikony se automaticky přepínají při přechodu z jednoho geometrického okna do druhého. I CAS okno má svou vlastní nástrojovou lištu.

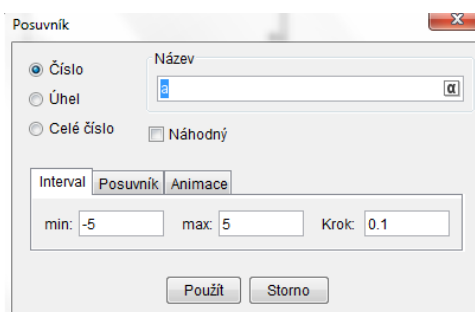


**Obr. 34:** Ukázka rozšířeného prostředí programu GeoGebra 5-0-y-0

GeoGebra je nejen geometrickým, ale i matematickým programem. Lze v ní vytvářet i grafy funkcí. V GeoGebra je možné přímé zadávání rovnic a souřadnic, vše do příkazového řádku programu. GeoGebra umožňuje počítat s čísly, vektory, souřadnicemi bodů, určovat derivace, integrály, nulové body, extrémy funkcí a mnohé další vlastnosti funkcí.

Všechny zobrazené objekty, ať už matematické či geometrické, lze interaktivně měnit. V GeoGebra existují dva typy objektů – volné a závislé. S volnými objekty lze po nánávkresně volně pohybovat či jim lze v algebraickém okně měnit souřadnice, rovnice apod. GeoGebra poskytuje dva úhly pohledu na jednotlivé objekty, tj. výraz v algebraickém okně odpovídá objektu v geometrickém okně a naopak. Veškeré provedené změny u volných objektů např. v geometrickém okně se automaticky přepočítávají v algebraickém okně a naopak. Platí též, že pokud objekty v jednom z oken barevně označíme, objeví se stejné barevné označení objektu i v ostatních oknech programu.

Změny prováděné u volných objektů nemusí být nastavovány pouze manuálně, lze naopak s velkou výhodou užívat dynamického nástroje programu – tzv. posuvníku.



**Obr. 35:** Plovoucí okno dynamického nástroje programu – posuvníku

Posuvník lze nastavovat pro číselné hodnoty (v oboru reálných či celých čísel), anebo pro hodnoty úhlů. Pro nastavení posuvníku je třeba zadat interval, ve kterém se bude posuvník přepočítávat, a také krok změny. Jsou-li nastaveny hodnoty posuvníku, lze jej aplikovat na zobrazované objekty v programu. S volnými objekty pak lze pohybovat tahem posuvníku po nánávkresně (viz obr. 36), anebo spuštěním automatické animace objektu. Ta se nastavuje zaškrtnutím příslušného políčka v okně vlastností objektu.



**Obr. 36:** Posuvník zobrazený na nánávkresně programu

## 4. Workshop

Součástí kurzu „Netradiční formy výuky v matematice – využití ICT“ bude také workshop, který bude následovat po krátkém představení programu GeoGebra. Náplň workshopu může být odvíjena od požadavků účastníků kurzu, proto zde workshopu není věnována žádná větší pozornost.

## 5. Závěr

Lze shrnout, že program GeoGebra má velmi všestranné užití, je bezplatně přístupný široké veřejnosti, disponuje verzemi pro PC, tablety a v blízké budoucnosti bude mít i applety pro mobilní telefony. Je tedy a do budoucna také bude možné tento program užívat téměř kdekoli a bez potřeby velkých finančních investic, neboť tablety a mobilní telefony vlastní v současné době již mnoho žáků a studentů.

Ve výukovém materiálu byly uvedeny pro názornost užití programu GeoGebra jen vybrané příklady. V programu lze vytvořit velké množství dalších materiálů pro různé oblasti matematiky a geometrie. Velké množství materiálů je také sdíleno uživateli programu na GeoGebraTube, kde si kdokoli může brát inspiraci či si již hotové applety může stáhnout.

Účastníci kurzu by měli být po jeho absolvování schopni zvládnout základní ovládání a vytváření grafických podkladů pro svou výuku, výukové materiály, apod.

## 6. Zdroje

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo 1990.
- [2] Krejčová (Bímová), D.: *Prostorová představivost a její rozvíjení* [diplomová práce], Liberec, Technická univerzita v Liberci, 1998.
- [3] Koman, M. a kol.: *40. ročník MO na ZŠ*. Praha, SPN 1993.
- [4] Campbell, G., Moran, P.: *365 hlavolamů*. Praha, Slovart 2010.
- [5] Havas, H. a kol.: *Lexikon inteligence*. Bratislava, Aktuell 2004.
- [6] Hohenwarter, M. - Preiner, J. *GeoGebra nápověda 3.0. 2007*.

⟨<http://www.geogebra.org>⟩

⟨<http://www.geogebra.org/download>⟩

⟨<https://www.geogebraTube.org/>⟩

⟨<http://wiki.geogebra.org/en/Manual>⟩

### **Autorka:**

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Technická univerzita v Liberci

Univerzitní náměstí 1410/1

461 17 Liberec

Telefon: +420 48 535 2808

E-mail: [daniela.bimova@tul.cz](mailto:daniela.bimova@tul.cz)





