

# Pomůcka k přípravě výukové hodiny s podporou Classroom Managementu (Matematika)

Obsah knihy:

- Mnohočleny
- Procenta
- Lomené výrazy
- Mocniny a odmocniny
- Zlomky
- Rovnice a soustavy rovnic
- Vytýkaní
- Geometrie
- Osová a středová souměrnost

Stránky: Moderní učitel 21. století

Kurz: Školení Využití ICT ve vzdělávacím procesu – Správa třídy (Classroom management) (KA6-B3)

Kniha: Pomůcka k přípravě výukové hodiny s podporou Classroom Managementu (Matematika)

Vytiskl(a): Dušan Maga

Datum: Úterý, 20. říjen 2015, 11.18

# Obsah

1 Úvod

2 Mnohočleny

3 Percentá

4 Lomené výrazy

5 Mocniny a odmocniny

6 Zlomky

7 Rovnice a soustavy rovnic

8 Vytýkaní

9 Geometria

10 Osová a středová souměrnost

# 1 Úvod

Tento dokument bol vytvorený ako podporný materiál pre školenia realizované v rámci projektu OP VK s názvom Moderní učitel 21. století, reg. číslo CZ.1.07/1.3.00/51.0019 (ďalej len projekt). Materiál ma za úlohu doplniť projektové činnosti, najmä však kľúčovú aktivitu KA6 o časť elektronického vzdelávania. Je zameraný na okruh Matematika, ktorý slúži na integráciu tabletov do vzdelávacieho procesu v rámci predmetov Fyzika na stredných a základných školách.

Tento dokument bol vytvorený ako podporný materiál pre školenia realizované v rámci projektu OP VK s názvom Moderní učitel 21. století, reg. číslo CZ.1.07/1.3.00/51.0019 (ďalej len projekt). Materiál ma za úlohu doplniť projektové činnosti, najmä však kľúčovú aktivitu KA6 o časť elektronického vzdelávania. Je zameraný na okruh Matematika, ktorý slúži na integráciu tabletov do vzdelávacieho procesu v rámci predmetov Fyzika na stredných a základných školách.

V rámci KA6 je časť aktivity venovaná odborným predmetom, ako sú napr. cudzí jazyk, matematika či fyzika. Tento dokument je nutné chápať ako podporný materiál k tejto aktivite. Všetky materiály k projektových aktivitám sú dostupné zo stránok projektu: <http://ucitel21.cedupoint.cz/>.

## 2 Mnohočleny

Mnohočlenom nazývame každý výraz, ktorý obsahuje nejakú premennú  $x$  a štandardné operácie násobenia, sčítania, odčítania, a umocňovania na celočíselný exponent. Mnohočleny môžeme medzi sebou sčítavať, odčítavať, násobiť a deliť, ale aj umocňovať na celočíselný exponent. Mnohočleny nazývame aj polynómy.

### Príklad 1

Operácie s mnohočlenmi.

Sčítanie a odčítanie mnohočlenov je jednoduchá záležitosť, sčítavame alebo odčítavame vždy koeficienty členov s rovnakými exponentmi.

Pri násobení mnohočlenov násobíme každý člen prvého mnohočlena s každým členom druhého mnohočlena, pričom koeficienty násobíme štandardne ako reálne čísla. Exponenty premenných sčítavame podľa pravidiel pre počítanie s mocninami.

### Príklad 2

Cieľom úprav mnohočlenov je dosiahnuť aby sa úpravou mnohočlen čo najviac zjednodušil. K dosiahnutiu tohto cieľa používame operácie ako rozširovanie, krátenie, vyberanie pred zátvorku, aplikácia vzorcov a podobne.

# 3 Percentá

Percentá obvykle označujú nejakú časť celku, pričom celok vyjadruje 100 %. Percentá je možné vždy zapísať tvare zlomku. Percentami môžeme nahradiť výrazy ako " tretina triedy dostala päťku" , každý druhý človek je žena". Vždy máme nejaký celok, napríklad triedu žiakov a ďalej hovoríme že tretina z nich dostala päťku, teda ak je v triede 30 žiakov a tretina z nich dostala päťku, potom počet žiakov, ktorý dostali päťku bude rovný  $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$  čo je to isté ako  $\frac{30}{3} = 10$ .

Jedno percento značíme 1 % a značí jednu stotinu z celku. Percentá môžeme ľahko prevádzať na zlomky a potom s nimi ďalej pracovať. Napríklad ak povieme, že v Prahe ma 75 % ľudí tmavé vlasy, je to isté akoby sme povedali, že  $\frac{75}{100} \cdot 1300000$  ľudí v Prahe má tmavé vlasy. 100% potom predstavuje celok, teda všetkých 1 300 000 obyvateľov.

Ak povieme, že 100 % žiakov prešlo do ďalšieho ročníka, znamená to že nikto neprepadol. Je to to isté, ako keby sme povedali, že 0 % žiakov prepadlo.

Časť celku vyjadrenú percentami môžeme ľahko previesť pomocou trojčlenky.

Napríklad Ivana zarobí priemerne 40 eur denne, ale dnes zarobila len 80 % svojej priemernej mzdy. Koľko zarobila?

100 % .....40  
80 %.....x

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{40}$$

$$x = 80 \cdot \frac{40}{100}$$

$$x = 32$$

Ivana zarobila 32 eur.

Čo ak poznáme časť a neznáme celok? Opäť použijeme trojčlenku.

Napríklad vieme že Martinov dnešný zárobok je 30 eur a predstavuje 75 % denného zárobku. Aká je Martinova priemerná denná mzda?

75 % .....30  
100 %.....x

$$\frac{75}{100} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30 \cdot \frac{100}{75}$$

$$x = 40$$

Martinova priemerná denná mzda je 40 eur.

Pri sčítaní percent treba byť opatrný, najlepšie je keď si miesto percent vypočítame presné hodnoty a tie potom sčítame. Ak už musíme naozaj percentá počítať, tak potom iba v prípade že majú rovnaký základ. Promile je tisícina celku, mylne sa niekedy promile zamieňajú za tisícinu percenta. Promile sa najčastejšie používajú pri meraní alkoholu v krvi.

## 4 Lomené výrazy

Lomený výraz je zlomok, ktorý má v čitateli aj menovateli nejaký mnohočlen. Cieľom úprav lomeného výrazu je zjednodušiť ho na čo najjednoduchší a najkrajší tvar.

Lomený výraz má teda tvar

$$\frac{\textit{mnohočlen}}{\textit{mnohočlen}}$$

### Príklad 1

Pre lomené výrazy určujeme podmienky za akých má daný výraz zmysel, pri lomenom výraze sa menovateľ nesmie rovnať nule, nulou nedelíme.

Pri úpravách lomených výrazov používame rovnaké postupy ako pri úpravách mnohočlenov, takže použijeme napríklad vynímanie pred zátvorku a rôzne užitočné vzorce.

Základnou technikou pri úpravách je krátenie zlomkov, takže pokiaľ máme v čitateli aj v menovateli výrazy, ktoré medzi sebou len násobíme môžeme krátiť rovnaké výrazy nachádzajúce sa v čitateli a v menovateli.

Lomené výrazy môžeme tiež vyriešiť pomocou algoritmu na delenie mnohočlenov čo môže byť užitočné napríklad v prípade, keď nie je možné použiť nejaký klasický prostriedok na úpravu výrazov.

## 5 Mocniny a odmocniny

Umocňovanie je matematická operácia, ktorá slúži k skráteniu zápisu viacnásobného násobenia.

Umocňovanie má tvar  $a^n$ , kde  $a$  je základ a  $n$  je exponent. Ak exponent je prirodzené číslo, tak hovorí koľkokrát za sebou máme vynásobiť číslo  $a$ . Základom môže byť čokoľvek, číslo kladné aj záporné, ale aj zložitejší výraz. počas výpočtu daný výraz násobíme toľkokrát koľko udáva exponent.

Pre  $n = 0$  zavádzame  $a^0 = 1$ .

Čo ak je exponent záporný? Aká je jeho interpretácia?

Vychádzame z toho že  $a^0 = 1$  a pokiaľ chceme vypočítať  $a^1$ , tak vynásobíme  $a^0$  výrazom  $a$ . Pretože  $a^0 = 1$ , tak súčinom získame  $a^0 \cdot a = a$ . Hodnotu  $a^0 = 1$ , môžeme považovať za východziu a keď počítame  $a^n$ , tak len  $n$  krát vynásobíme hodnotu  $a^0$  výrazom  $a$ . Akoby sme postupovali, ak by  $n$  bolo záporné. Ak  $n$  je kladné tak násobíme, ak  $n$  je záporné tak delíme. Takže  $a^{-1}$  by sme získali tak že počiatočnú hodnotu  $a^0$  delíme výrazom  $a$ . Dostávame tak rovnicu  $a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$ .

Ak by sme chceli vypočítať  $a^{-2}$  tak by sme  $a^0$  vydělili výrazom  $a$  dvakrát a dostali by sme  $\frac{1}{a^2}$  a máme teda postup, ako vypočítať mocninu so záporným exponentom, vypočítame mocninu ako keby bol exponent kladný a následne len prevrátime hodnotu vydelením jedna lomeno výsledok umocnenia, čiže  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Exponent môže byť aj racionálne číslo, teda také číslo, ktoré môžeme zapísať v tvare podielu dvoch celých čísel. Nech teda máme zlomok v tvare  $\frac{m}{n}$ , kde  $n$  je kladné číslo, potom môžeme napísať vzorec

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , čiže definujeme  $n$  tú odmocninu z  $a^m$ .

Odmocnina je čiastočná inverzná funkcia k mocnine. Najčastejšie pracujeme s druhou odmocninou, ktorá hľadá také číslo, ktoré keď vynásobíme so sebou samým, tak získame pôvodné číslo, ktoré sme odmocnili.

## 6 Zlomky

Zlomkom môžeme zapísať akékoľvek racionálne číslo. Zlomok sa skladá z dvoch častí. Horná časť sa nazýva čitateľ a spodná časť menovateľ. Existuje aj zložený zlomok, čo nie je nič iného ako zlomok, ktorý má v čitateli alebo v menovateli ďalší zlomok. Všetky znamienka ( plus, mínus, krát, deleno) medzi zlomkami píšeme na úroveň zlomkovej čiary.

Zlomok má nasledujúci tvar

$$\frac{\text{čitateľ}}{\text{menovateľ}}$$

Menovateľ sa hovorí preto, že pomenováva zlomok: pätina, tretina... a pod, je to hlavný názov zlomku a je odvodený od čísla, ktoré sa nachádza pod zlomkovou čiarou. Čitateľ určuje počet.

Čitateľ aj menovateľ môže byť opäť akékoľvek číslo alebo zase opäť zlomok, najčastejšie sa stretávame so zlomkom kde čitateľ aj menovateľ sú prirodzené čísla.

Zlomok je len zápis delenia, hodnotu zlomku vypočítame tak že vydáme čitateľ menovateľom.

So zlomkami môžeme rôzne pracovať a meniť ich tvar, rozširovať a krátiť, pričom sa hodnota zlomku nemení. Môžeme si to predstaviť tak napríklad, že jedna polovica má rovnakú hodnotu ako dve štvrtiny a podobne a vychádza to z toho, že zlomok je len iný zápis delenia. Dve štvrtiny získame tak, že v zlomku jedna polovica čitateľa aj menovateľa vynásobíme dva, teda zlomok rozšírime, ale v skutočnosti ho vynásobíme číslom jedna, teda nezmeníme jeho hodnotu.

Opačnou operáciou k rozširovaniu zlomkov je krátenie zlomkov, kde čitateľ aj menovateľ delíme rovnakým číslom. Ak teda chceme zlomok krátiť, musíme nájsť číslo, ktorým môžeme bezo zvyšku deliť čitateľ aj menovateľ. Krátenie zlomkov sa v praxi veľmi často využíva, pretože krátením sa zlomok značne zjednodušuje. Zlomok, ktorý sa už nedá ďalej krátiť, teda aj neexistuje číslo, ktorým by sme mohli bezo zvyšku vydeliť čitateľ aj menovateľ, taký zlomok nazývame v základnom tvare.

Násobenie zlomkov je jednoduchšie ako sčítanie a odčítavanie. Ak máme vynásobiť dva zlomky, vynásobíme jednoducho čitateľ prvého zlomku s čitateľom druhého zlomku a menovateľ prvého zlomku s menovateľom druhého zlomku.

Delenie zlomkov je rovnako ľahké ako násobenie, ak chceme jeden zlomok vydeliť druhým, stačí druhý zlomok obrátiť a jednoducho ich medzi sebou vynásobiť.

Sčítanie zlomkov je mierne komplikovanejšie, sčítat zlomky môžeme iba vtedy, keď majú rovnaký základ, teda keď majú rovnaký menovateľ. Ak zlomky rovnaký menovateľ nemajú, musíme ich na spoločný menovateľ previesť. Potom postupujeme tak že jednoducho sčítame čitateľ prvého zlomku s čitateľom druhého zlomku.



## 7 Rovnice a systavy rovníc

Rovnica je jeden zo základných pojmov v matematike a jeden z prostriedkov, vďaka ktorému celá matematika funguje.

Rovnicu si môžeme predstaviť ako zápis rovnosti dvoch funkcií  $f(x) = g(x)$ . Toto je všeobecný zápis rovnice o jednej neznámej. Na ľavej strane máme funkciu  $f$  a na pravej funkciu  $g$ . Našou úlohou je nájsť korene rovnice, čo znamená hodnoty  $x$ , pre ktoré majú funkcie  $f$  a  $g$  rovnaké hodnoty.

Rovnice majú pekný geometrický význam. Ak si nakreslíme grafy funkcií, ktoré sú na pravej a ľavej strane rovnice, tak tieto grafy sa budú pretínať práve v miestach kde má daná rovnica riešenie.

Z grafickej interpretácie rovníc môžeme usúdiť koľko rôznych riešení môže rovnica mať a môžeme tak odpovedať na otázku koľko má rovnica riešení? Môže mať viac než jedno riešenie? Môže mať nekonečne mnoho riešení?

Ak chceme odpovedať na otázku či existuje rovnica, ktorá nemá žiadne riešenie je to to isté ako by sme sa pýtali, či existujú grafy funkcií ktoré sa nikdy nepretnú. Odpoveď je samozrejme, existujú. Napríklad pre lineárne rovnice, grafy dvoch rovnobežných priamok sa nepretínajú v žiadnom bode.

Môže mať rovnica viac riešení, prípadne nekonečne mnoho? Odpoveď je opäť kladná, rovnica môže mať aj viac riešení, dokonca nekonečne mnoho. Napríklad ak na jednej strane rovnosti je funkcia sínus a na druhej lineárna funkcia, tak môžu nastať všetky možnosti, v závislosti od toho aké je vyjadrenie lineárnej funkcie na pravej strane.

V praxi sa často stretáme s prípadom, keď nepočítame jednu rovnicu, ale hneď dve rovnice zároveň (prípadne ešte viacej). V sústave obvykle máme viac premenných ako jednu a snažíme sa nájsť takú kombináciu čísel, ktoré keď dosadíme za všetky premenné tak všetky rovnice majú zmysel.

Metódy riešenia rovníc sú rôzne, závisia od typu rovní. Najjednoduchšia metóda je dosadzovacia, kedy si z jednej rovnice vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do druhej (ostatných) pokiaľ je to možné.

## 8 Vytýkání

Vytýkání je opačná funkcia ako roznásobovanie zátvoriek. Cieľom vytýkania je daný výraz zjednodušiť alebo ho dostať do tvaru súčinu, aby mohli napríklad v zlomku krátiť.

Například vo výraze  $10 \cdot x + 5$  môžeme vyňať 5:

$$10 \cdot x + 5 = 5 \cdot (2 \cdot x + 1)$$

Keď spätne roznásobíme zátvorku, dostaneme výraz, ktorý sme mali na začiatku.

Často krát potrebujeme vyňať len neznámu, nemusíme vynímať číslo. Napríklad z výrazu  $5 \cdot x^2 + 3 \cdot x$  môžeme vyňať  $x$  a dostaneme  $x \cdot (5 \cdot x + 3)$ .

Vynímať môžeme aj zložitejšie výrazy, kedy vynímame celé zátvorky. Zásada je ale vždy rovnaká, po roznásobení musíme dostať pôvodný výraz.

## 9 Geometria

Základné geometrické pojmy.

Priamka je po bode druhý najjednoduchší geometrický útvar a je jednorozmerná ( má ako keby len dĺžku). Priamka je stručne povedané nekonečne dlhá rovná čiara, ktorá nemá začiatok ani koniec.

Ďalším dôležitým geometrickým pojmom je pojem uhla. Jeho definícia nie je úplne jednoduchá záležitosť, v zjednodušenej variante možno uhol definovať ako časť roviny ohraničenej dvoma polpriamkami, ktoré majú spoločný začiatok. Dôležité na tejto definícii je to že uhol nie sú len tie dve ramená, ale celá plocha, ktorú tieto dve ramená zvierajú.

Štvorec je základný geometrický útvar, ktorý má všetky štyri strany rovnako dlhé a každý vnútorný uhol má veľkosť 90 stupňov.

Obdĺžnik je rovnobežník, ktorého všetky vnútorné uhly majú veľkosť 90 stupňov. Protiľahlé strany obdĺžnika majú vždy rovnakú veľkosť. Štvorec je potom špeciálnym prípadom obdĺžnika, ktorý má všetky strany rovnako veľké.

Kuželosečka je krivka, ktorá vznikne prienikom roviny s plášťom rotačného kužeľa. Najjednoduchšou kuželosečkou je kružnica, ďalšie sú parabola, elipsa a hyperbola.

Kružnica je krivka, ktorá má od daného bodu, stredu kružnice, vždy rovnakú vzdialenosť.

Elipsa je krivka, ktorej každý bod má od daných dvoch bodov v rovine rovnaký súčet vzdialeností.

Hyperbola je kuželosečka, kde pre každý jej bod platí, že absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od dvoch pevne daných bodov je vždy rovnaká.

Parabola je krivka, ktorá má od danej priamky a od daného bodu, ktorý na tej priamke neleží, konštantnú vzdialenosť.

## 10 Osová a středová souměrnost

Středová souměrnost patří mezi vhodné zobrazení. To znamená že aplikováním středové souměrnosti se nemění vzdálenost bodů a velikost úhlů.

Ak máme daný bod  $A$  a máme nájsť bod  $B$ , ktorý bude stredovo súmerný podľa bodu  $S$ , tak vedieme priamku  $p$  cez body  $A$  a  $S$ . Bod  $B$  leží na tejto priamke a jeho vzdialenosť je rovná vzdialenosti bodu  $A$  od bodu  $S$ .

Môže nastať situácia, že nemáme daný stred súmernosti, máme zadané dva útvary a chceme určiť stred ich súmernosti. Stred súmernosti nájdeme tak, že bodmi  $A$  a  $B$  vedieme priamku  $p$  a potom určíme stred úsečky  $AB$ .

Osová súměrnost je zobrazení v rovině, které překlápá vzory cez os. Môžeme si to predstaviť ako otlačok po preložení listu papiera. Podľa osovej súmernosti vznikne teda obraz, ktorý je zhodný so vzorom a prevrátený v smere kolmom na os. Pôvodný obrazec nazývame vzor, ten ktorý vznikne zobrazením nazývame obraz. Priamku cez ktorú sa vzor preklápa nazývame os súmernosti.