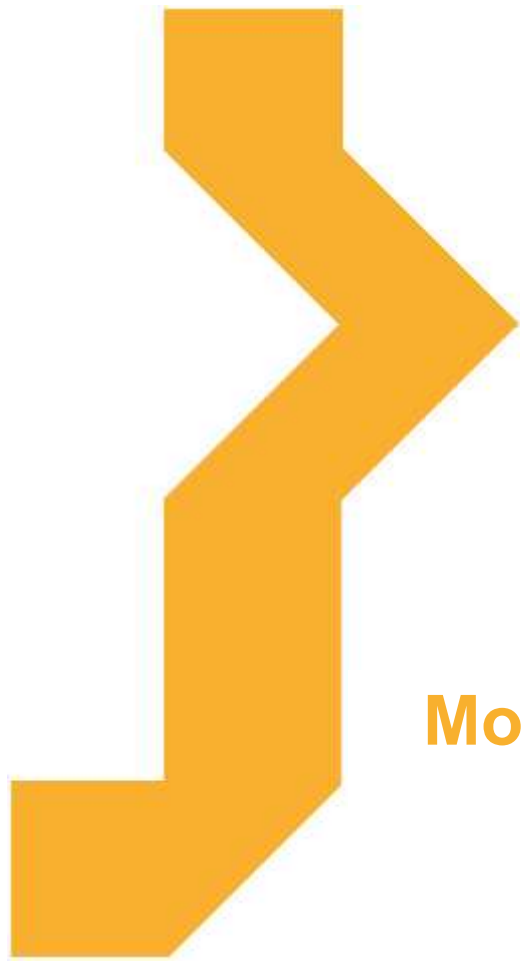




Moderní přístupy k výuce matematiky

Jana Cachová, Lukáš Vízek

Studijní materiál vznikl za podpory projektu
Vzájemným učením - cool pedagog 21. století (CZ.1.07/1.3.00/51.0007), který je
spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Anotace kurzu

Vzdělávací program Moderní přístupy k výuce matematiky je zaměřen na zefektivnění a zkvalitnění výuky matematice na všech stupních škol. Program se zaměřuje jednak na vyučování matematice na prvním stupni s přesahem do dvou nižších ročníků druhého stupně, tedy na šestý a sedmý ročník, jednak na vyučování matematice ve vyšších ročnících druhého stupně a na střední škole.

Program přibližuje nové trendy v didaktice matematiky, klade důraz na uplatnění podnětných přístupů k vyučování matematice na jednotlivých stupních škol a také na aktivní podíl žáků na průběhu výuky, především na jejich aktivní zapojení při práci s podnětnými úlohami.

Součástí programu je také ukázka možností efektivního využití moderních technologií v hodinách matematiky. Budou představeny kvalitní on-line přístupné studijní nástroje, různé didaktické matematické softwary a jejich užití ve výuce. Důraz bude kladen na přímou aplikaci představené techniky k samotné pedagogické praxi, např. bude prezentováno užití ICT při řešení konkrétních úloh ZŠ a SŠ matematiky.

Cíle kurzu

Cílem vzdělávacího programu Moderní přístupy k výuce matematiky je přiblížit na konkrétních názorných ukázkách účastníkům programu nové trendy v didaktice matematiky. Tyto ukázky nových směrů budou jednak zaměřené na změnu vyučovacího přístupu učitele, využívání zajímavých a podnětných prostředí ve výuce matematice, na práci s podnětnými úlohami a aktivním zapojením žáka do procesu jejich řešení, jednak také na využívání moderních informačních technologií během výuky (např. práce s didakticko-matematickými aplety, interaktivními programy, interaktivní tabulí aj.). Cílem programu je rovněž seznámit účastníky s kvalitními webovými stránkami, jež jsou zaměřené na vzdělávání ZŠ a SŠ matematiky. Dále představit možnostmi dynamických softwarů při přípravě a realizaci výuky matematiky.

Osnova kurzu

- Podnětná výuka na prvním a druhém stupni základní školy
- Některá zajímavá matematická prostředí a práce v nich na prvním stupni a v prvních ročnících druhého stupně základní školy
- Využití didakticko-matematických apletů ve vyučování matematice
- On-line dostupné výpočetní nástroje
- Podpora výuky matematiky prostřednictvím webových stránek
- Propojování geometrie a algebry střední školy pomocí dynamických softwarů
- Funkce na druhém stupni základní školy v programu GeoGebra

Význam ikon v textu



Cíle

Na začátku každé kapitoly je uveden seznam cílů



Pojmy k zapamatování

Seznam důležitých pojmů a hlavních bodů, které by student při studiu tématu neměl opomenout.



Poznámka

V poznámce jsou různé méně důležité nebo upřesňující informace.



Kontrolní otázky

Prověřují, do jaké míry student text a problematiku pochopil, zapamatoval si podstatné a důležité informace.



Souhrn

Shrnutí tématu.



Literatura, zajímavé odkazy

Použitá ve studijním materiálu, pro doplnění a rozšíření poznatků.

Obsah

1	Podnětná výuka na základní škole	5
1.1	Principy podnětné výuky.....	5
1.2	Zájem dítěte o matematiku a její poznávání	8
1.3	Práce s podnětným prostředím	9
1.4	Aktivita žáka - jeho aktivní činnost	12
1.5	Práce s chybou.....	13
1.6	Správné porozumění.....	14
2	Některá zajímavá matematická prostředí a práce v nich	17
2.1	Zajímavá matematická prostředí	17
2.2	Některá zajímavá prostředí v matematice primární školy a druhého stupně základní školy	18
3	Využití didakticko-matematických apletů ve vyučování matematice	21
3.1	Didakticko-matematické aplety	21
3.2	Využití knihovny NLVM ve vyučování matematice	22
3.3	Využití knihovny NCTM ve vyučování matematice	24
4	On-line dostupné výpočetní nástroje	27
4.1	Draw Function Graphs	27
4.2	Fooplot	28
4.3	Wolfram Alpha.....	30
4.4	Matematické výpočty online (MAW)	33
5	Podpora výuky matematiky prostřednictvím webových stránek	36
5.1	Realisticky.cz	36
5.2	Portál středoškolské matematiky.....	38
6	Propojování geometrie a algebry střední školy pomocí dynamických softwarů	41
6.1	Dynamické geometrie	41
6.1.1	Programy dynamické geometrie	41
6.2	Ukázka principu	42
7	Funkce na druhém stupni ZŠ a na SŠ v programu GeoGebra	45
7.1	Význam koeficientů předpisu lineární funkce	45
7.2	Význam koeficientů předpisu kvadratické funkce	46
8	Banka otázek.....	49

1 Podnětná výuka na základní škole



Cíle

V této kapitole se seznámíte:

- se základními principy podnětné výuky;
- s některými možnostmi, jak zlepšit a zefektivnit svou výuku.



Pojmy k zapamatování

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|
| • dobrá matematika | • podnětná výuka | • práce s chybou |
| • matematická kultura | • zájem | • diagnostika porozumění |
| • matematická gramotnost | • motivace | • analýza a priori |
| • dobré porozumění obsahu | • podnětná prostředí | • analýza a posteriori |
| | • práce s úlohou | • lesson study |
| | • žákova aktivní činnost | |

1.1 Principy podnětné výuky

„... Didaktika jest umění jak dobře učit. Učiti značí působiti, aby tomu, kdo něco zná, se naučil také někdo jiný a znal to...“ (Komenský, 1947).

Definice J. A. Komenského vystihuje přesně a jednoduše podstatu vyučování. V této kapitole nás bude zajímat, jak efektivně dosáhnout toho, aby se žáci základní školy skutečně dokázali „naučit matematiku tak, aby ji znali“, to znamená, aby jí především porozuměli a uměli ji dále aplikovat. Je vůbec možné tohoto docílit? Pokud ano, jakými prostředky? To jsou otázky, které nás budou zajímat a na které se budeme snažit hledat odpovědi.

J. A. Komenský ne náhodou označil schopnost učitele dobře učit za umění. I to naznačuje, že učit matematice není jednoduchou záležitostí a že je zapotřebí, pokud chceme dosáhnout dobrých výsledků, stejně jako v umění např. hudebním, tuto schopnost pilně rozvíjet a dále zdokonalovat. Základem je, aby učitel **dobře rozuměl obsahu**, tedy tomu, co vlastně žáky učí.

Americká autorka čínského původu Liping Ma (podrobně Ma, 1999) zdůrazňuje, že základem matematiky jsou čísla a početní algoritmy. F. Kuřina (viz Hošpesová, Kuřina, 2011) k tomu dodává: „...Aritmetika a geometrie byly hlavní větve matematiky v historii, a ačkoliv se dnes matematika neobyčejně rozrostla, jsou jejím základem i dnes. Přesto, že lze nalézt množství zajímavých problémů o množinách a logice, k řešení úloh, ke skutečnému jádru matematiky se na elementární úrovni hodí spíše klasická aritmetika, algebra a geometrie. Souhlasíme tedy s Liping Ma, že hluboké

studium elementární matematiky je plodné. Poznat důkladně vlastnosti čísel, početních operací a strukturu elementární geometrie znamená i budování aparátu k řešení úloh. Takovýto přístup odpovídá rovněž historickému vývoji matematiky...“.

Skutečnost, že schopnost „dobře rozumět obsahu“ v současné době není u učitele tak zcela samozřejmá, jak bychom očekávali, dokládají následující ukázky zahraničních (Ma, 1999) i našich domácích (Hošpesová, Kuřina, 2011) autorů.

Liping Ma srovnávala skupinu amerických učitelů primární školy se skupinou učitelů čínských – oběma skupinám zadávala netradiční úlohy z elementární aritmetiky. Úlohy ukázaly větší úspěšnost čínských učitelů. Liping Ma to vysvětluje tím, že američtí učitelé důkladně nerozumějí elementární matematice, ačkoliv jejich vzdělání je formálně „lepší“ než vzdělání čínských učitelů. Liping Ma na řadě úloh dokazuje, že existují učitelé, kteří učí, aniž by rozuměli obsahu, viz např. následující úloha:

- *Vymyslete příběh nebo slovní úlohu, jejíž řešení by vedlo k výpočtu $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$.*

F. Kuřina (Hošpesová, Kuřina, 2011) k tomu dodává: „...Ačkoliv by patrně úloha najít interpretaci výpočtu $6 : 3$ nedělala žádnému učiteli potíže, našlo vhodnou slovní úlohu pouze 5 % ze skupiny 23 amerických učitelů a 90 % ze skupiny 72 čínských učitelů. Úlohu jsme zadali i skupině našich učitelů základních škol, kteří byli úspěšní v 35 %.

Přirozeně nám vůbec nejde o jakékoliv srovnávání úrovně učitelů, ale úloha signalizuje, že někteří učitelé, kteří se zúčastnili šetření, mají nízkou úroveň matematické gramotnosti, vykazují malé porozumění matematice či jejímu jazyku. Vyjádření našich učitelů k úloze: nic mě nenapadá, nevím, tohle nevymyslím, na tuto úlohu nemám dostatečnou fantazii, náš názor potvrzují. Přitom existují zcela přirozené interpretace naší úlohy, např. tyto:

- *$1\frac{3}{4}$ litru vody mám rozlít do půllitrových hrnků. Kolik jich naplním?*
- *Obdélník s obsahem $1\frac{3}{4} \text{ m}^2$ má jednu stranu dlouhou $\frac{1}{2} \text{ m}$. Jak je dlouhá jeho druhá strana?*
- *Auto jede rychlostí $\frac{1}{2} \text{ km}$ za minutu. Za kolik minut ujede $1\frac{3}{4} \text{ km}$?*

Tvorbou netradičních úloh z elementární matematiky se ve druhé polovině 20. století zabývala paní učitelka Blažena Součková, autorka řady učebnic a publikací o matematice a jejím vyučování: „...O nejedné úloze jsme se domnívali, že ji možná žák nevyřeší. A přesto někteří žáci na řešení, mnohdy velice originální, přišli. V dětských kolektivech jsou často velmi nadané děti, které potřebují jen dobré vedení a dostatek času, aby problémy v klidu promyslely. K tomu je třeba vytvořit při hodinách ovzduší neuspěchané, přívětivé, družné pohody, při kterém jsou i chyby chápány jako cesty k poznání a kdy radost z různých způsobů řešení úloh přispěje k rozvoji schopnosti celého kolektivu třídy.“ (Součková 1992, s. 14). Zkuste si několik úloh z dílny paní učitelky Součkové vyřešit:

- *Součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel je 15 120. Určete tato čísla.*
- *Kolik různých signálů můžeme vyslat rozsvícením 4 oken domu, která jsou vidět z určitého místa?*

- *Vyjádřete číslo 100 jako součet nebo rozdíl co nejmenšího počtu třetích mocnin přirozených čísel menších než 10.*
- *Ze čtyř shodných hracích kostek skládejte kvádry tak, že stěny, které k sobě přiléhají, obsahují stejný počet teček. Složte takový kvádr, aby součet počtu teček na jeho povrchu byl a) co nejmenší, b) co největší.*

Výše uvedený citát B. Součkové přesně vystihuje podstatu toho, jak by mělo vypadat dobré vyučování matematice, snažící se dovést žáky k dosažení dobré úrovně jejich matematické kultury a gramotnosti.

Matematickou kulturu lze chápat ve smyslu tzv. **dobré matematiky** (Kuřina, 2008) jako:

- *dobré řešení problémů,*
- *dobrou matematickou techniku,*
- *dobré matematické aplikace,*
- *pěstování matematického vhledu,*
- *pěstování tvořivosti,*
- *vnímání krásy matematiky.*

Úrovně matematické kultury jsou různé, závisejí na stupni a typu školy. Jiná úroveň je u technika, učitele, maturanta, odborného matematika, žáka.

Nutným předpokladem správného rozvíjení matematické gramotnosti žáka je porozumění pojmům a postupům, hlubší pochopení vztahů a souvislostí. Zjednodušeně to můžeme označit jako dobré fungování matematiky, kterou se žák učí. (K tomu může napomoci aktivní práce v některých podnětných prostředích, o nichž bude řeč v kapitole 2 tohoto textu). Cílem dobrého vyučování tedy rozhodně není vést žáky k pouhému odříkání vyloženého učiva, ale naopak rozvíjet matematiku v mysli dítěte a tím systematicky posouvat hranice jeho dosavadního poznání. Příkladem takové dobré vyučovací praxe může být **podnětné vyučování**.

Podnětné vyučování je založeno na individuálním přístupu, soustředí se na vnitřní matematický svět žáka (jaké má žák představy o pojmech, jak rozumí souvislostem, pojmům a postupům, jak je dokáže užívat). Sleduje změny v pojmotvorném procesu žáka a snaží se na ně citlivě reagovat. Cílem podnětného vyučování je dosáhnout dobrého vyučování, vést žáky k budování správných představ, k porozumění a k aplikování. Učitel v takovém vyučování (Stehlíková, Cachová, 2006) především:

- *probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání,*
- *předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje,*
- *podporuje žakovu aktivní činnost,*
- *nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žakova chápání matematiky a impulz pro další práci,*
- *orientuje se na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.*

Podívejme se nyní podrobně na jednotlivé principy podnětné výuky.

1.2 Zájem dítěte o matematiku a její poznávání

Podnětné vyučování vede žáka k budování správných představ, k porozumění a k aplikování matematiky. Velmi důležitou roli zde hraje právě motivace, která je jeho základní podstatou. Hlavní motivační sílu představuje zájem žáka, radost z práce a úspěchu. Nebude nás tedy v první řadě zajímat vnější motivace typu známka, pochvala učitele, soutěže apod., ale naopak se zaměříme na vnitřní motivaci, která vyrůstá z vnitřních pohnutek, tedy se budeme snažit hledat možné cesty k tomu, aby žáci sami chtěli v matematice něco zjistit.

V následujícím textu přinášíme konkrétní ukázkou motivace žáka podnětnou úlohou, založenou na geometrické skládance „*Aladin a létající koberec*“ (J. Vránová, 2006).

Skládanka rozvíjí orientaci v rovině, představivost žáka. Je určena pro první stupeň (1. - 5. ročník).

Skládanka je tvořena pouze dvěma typy dílků (viz obrázek 1), možnosti jejího využití jsou ale poměrně široké. Činnosti, které se ke skládance váží, je možné odstupňovat podle obtížnosti od nejjednodušších, vhodných pro malé děti, až po obtížnější.

K úvodní motivaci je možné využít stejnojmennou pohádku z knihy Tisíc a jedna noc:

Aladin je uvězněn v temné věži. Potřebuje se z ní dostat, aby mohl zachránit princeznu. Jediná cesta z věže vede oknem, které je až úplně nahoře. Nevedou k němu žádné schody. Dostat se k oknu může jen pomocí létajícího koberce, který ale zlý čaroděj rozstříhal na kousky. Pomůžeš Aladinovi složit koberec, aby se dostal z věže?



Obrázek 1 – základní dílky skládanky *Aladin a létající koberec* (Zdroj: Vránová, 2006)

Každé dítě dostane čtyři velké dílky a libovolné množství čtvercových dílků. Nejprve necháme děti, aby si se skládankou volně pohrály. Až pak jim sdělíme pravidla pro skládání:

- musí použít všechny části,
- nesmí vytvářet žádné mezery.

Protože části do sebe zapadají různě, existuje mnoho řešení. Je možné se zaměřit například na symetrická řešení. Děti většinou pojem "symetrie" ještě neznají, proto s nimi hovoříme o pravidelných obrazcích, o tom, zda se jim některé líbí více než

ostatní (mnoho dětí přirozeně považuje symetrické obrazce za hezčí).



Obrázek 2 – skládanka *Aladin a létající koberec* - řešení žáků (Zdroj: Vránová, 2006)

Možnosti činností se skládankou (od nejjednodušších po nejsložitější):

- *Pokus se složit z daných částí koberec. Zkus vymyslet co nejvíc možností.*
- *Použij pouze čtyři větší a čtyři malé části a slož z nich koberec.*
- *Použij čtyři velké a pouze dvě malé části.*
- *Použij čtyři velké a jednu malou část.*
- *Je možné sestavit koberec pouze ze čtyř velkých částí? Pokus se o to!*

Skutečnost, že je možné hledat motivaci k aktivním činnostem v matematice i pro žáky druhého stupně základní školy, dokládá námět „***Ekonomický obal***“ (Stehlíková, Cachová, 2006):

„...Představte si, že určitá firma chce vyrábět nový výrobek. Musí navrhnout a vyrobit takový obal, který by byl co nejlevnější, ovšem i spolehlivý a aby se co nejlépe převážel např. v krabicích. Navrhněte takový obal a vyčíslete náklady na výrobu 100 ks.

Děti dostanou určitý předmět (nejlépe nějaký nepravidelný), pro který se má vytvořit obal, a materiál (papír, nůžky, lepidlo). Při práci musí brát v úvahu mnoho faktorů: náklady a jednoduchost výroby obalu, skladnost jednotlivých obalů, množství odpadu, případně i barevný návrh obalu. Pro zjištění nákladů musí počítat i povrch obalu a obsah odpadu. Z hlediska matematických pojmů pracují i s procenty, poměrem, objemem apod.

Ilustrace zahrnuje motivaci ze „skutečného života“. Úloha může být zpracována jako interdisciplinární projekt nejen v hodinách matematiky, ale také výtvarné výchovy. Pro žáky je toto zadání zajímavější, než kdyby měli počítat obsahy a objemy určitých útvarů. Úloha je formulována poměrně otevřeně. Někteří žáci si s jejím konkrétním vypracováním poradí dobře, jiným bude třeba pomoci. Učitel by však neměl sklouznout k tomu, aby úlohu pro žáky rozpracoval do posloupnosti konkrétních kroků...“.

1.3 **Práce s podnětným prostředím**

Práce s podnětným prostředím je vlastně v první řadě prací s vhodnými úlohami, které podpoří u žáků správné představy, porozumění podstatě problému a zároveň jsou pro žáka dostatečně zajímavé, aby jej motivovaly k aktivní práci.

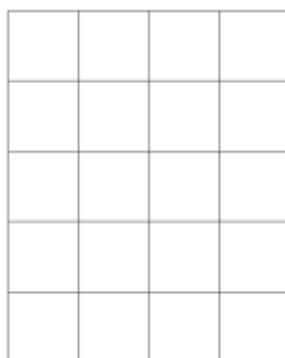
F. Kuřina (2003) pod pojmem matematická úloha chápe jakoukoli výzvu k matematické činnosti. Podle náročnosti dělí úlohy na:

- **cvičení** (prostá aplikace jednoho nebo několika algoritmů),

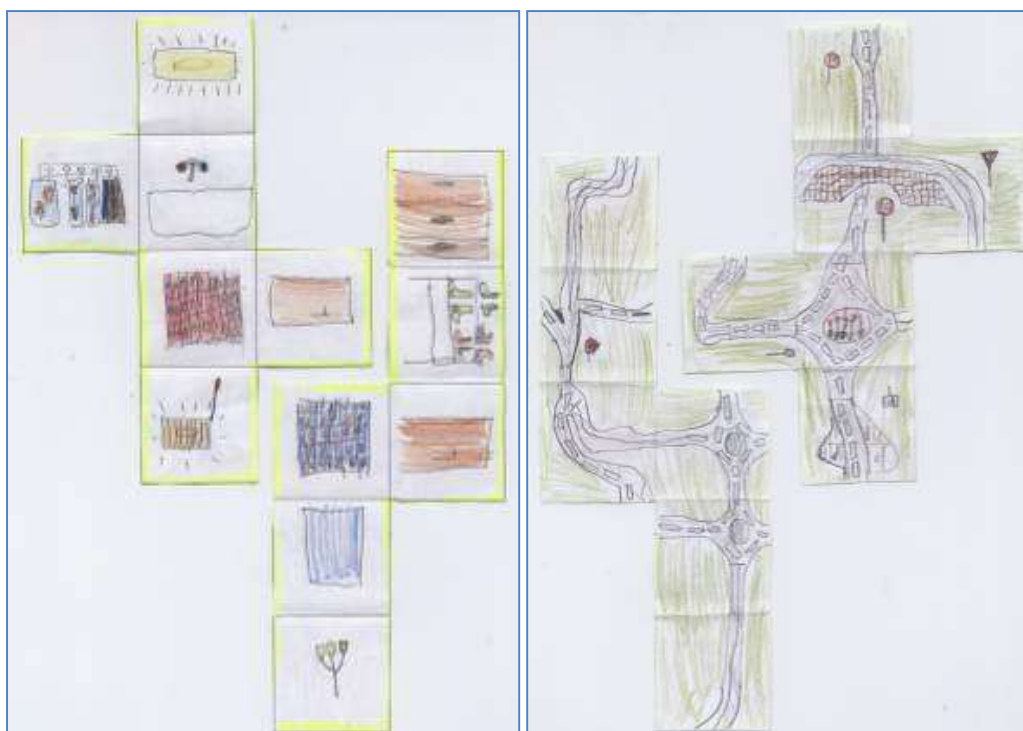
- **úlohy** (v užším slova smyslu – obvyklá aplikace probrané teorie),
- **problémy** (vyžadují tvořivý přístup).

Jako podnětné pro rozvoj myšlení žáků podle tohoto dělení přicházejí tedy v úvahu aplikační úlohy a problémy. Nejde však jen o to vybrat vhodnou úlohu, ale především s ní také vhodně pracovat. Už předchozí ukázka – námět „Ekonomický obal“ (kapitola 1.1.1) v závěru naznačuje, že i problémovou úlohu může učitel pojmout zcela neproblémově, pokud sklouzne „...k tomu, aby úlohu pro žáky rozpracoval do posloupnosti konkrétních kroků...“ (Stehlíková, Cachová, 2006). Následující dvě ukázky naznačí, jak může taková podnětná práce s úlohou v hodině matematiky vypadat. Nejprve uvedeme úlohu pro žáky prvního stupně (3. – 5. ročník):

Úloha navazuje na již dřívější práci se sítěmi krychle. Děti mají za úkol si vybrat jednu pro ně zajímavou síť krychle a tu překreslit do připravené čtvercové sítě (obr. 3). Dříve než síť z papíru vystříhnou, namalují do ní pohled do nějaké místnosti u nich doma tak, aby po vystřížení a složení krychle vše odpovídalo „realitě“, tj. nebylo nic potočeno ani převráceno vzhůru nohama apod. (viz obr. 4 – žák třetí třídy nakreslil předsíň a koupelnu). Pokud děti po vystřížení a složení krychle zjistí, že se jim to zcela správně nepodařilo, mají možnost opravy – obrátit papír a na rubovou stranu sítě kreslit pokoj znovu. Pokud je vše v pořádku, mohou na rubovou stranu sítě naopak zakreslit nekonečnou smyčku cest nebo silnic. Po složení krychle si pak pomocí tužky vyzkouší, zda lze všechny cesty projet, zda na sebe jejich začátky a konce správně navazují.



Obrázek 3 – čtvercová síť (formát A4) pro zakreslení sítě krychle



Obrázek 4 – „místnost v krychli, silnice na krychli“

Jako ukázka podnětné práce s úlohou na druhém stupni ZŠ může posloužit hledání součtu úhlů v mnohoúhelníku (Stehlíková, Cachová, 2006):

„... Znají-li děti součet úhlů v trojúhelníku, mohou pak rozdělit mnohoúhelníky pomocí úhlopříček na trojúhelníky a doplňovat následující tabulku:

Mnohoúhelník	počet stran	počet trojúhelníků	součet vnitřních úhlů
čtyřúhelník	4	2	$2 \cdot 180 = 360$
pětiúhelník	5	3	$3 \cdot 180 = 540$
šestiúhelník	6		
sedmiúhelník	7		
...			
n -úhelník	n		

Obrázek 5 – součet úhlů v mnohoúhelníku – tabulka k řešení úlohy (Zdroj: Stehlíková, Cachová, 2006)

Je pravděpodobné, že k zobecnění se samostatně propracují jen některé děti. Nicméně i ti ostatní budou zřejmě schopni vyplnit konkrétní hodnoty tabulky a alespoň tak se podílet na celkovém řešení. Učitel může přistupovat k dětem individuálně v tom, že některým poradí, např. jak si mají mnohoúhelník rozdělit na trojúhelníky, jiné upozorní na hledání souvislosti mezi číslem, kterým násobíme 180 stupňů, a počtem stran, jiné nechá zcela bez nápovědy. Podle toho, jak se mu děti jeví, ale zejména podle toho, jakou nápovědu děti vyžadují. Rozhodně mají dostat dostatek času na začátku, aby

se pokusily najít strategii řešení samy...”

1.4 Aktivita žáka - jeho aktivní činnost

„...Chceme-li vést žáky k aktivitě a rozvíjet jejich matematický svět, nesmíme se bát dát jim problém, kde není řešení na první pohled patrné, a musíme mít i „odvahu“ jim neporadit. Chápeme obavy učitelů, cítí zodpovědnost za to, co se děti naučí. Nicméně pochybnosti, tápání a frustrace patří do matematické práce, jen tak mohou alespoň některé děti zažít radost z objevu. Každý se musí se situací nejdříve poprat, aby ji porozuměl (třeba za pomoci ostatních nebo učitele)...

...Nechceme, aby vznikl dojem, že učitel nemá žákům poskytovat žádnou pomoc! Jde spíše o to, najít určitou míru pomoci, a záleží na tom, jaký cíl určitou aktivitou učitel sleduje. Chce-li, aby žáci něco samostatně objevili, musí jim k tomu dát na jedné straně prostor a na druhé straně zajistit, aby měli všechny nutné zdroje...” (Stehlíková, Cachová, 2006).

Jako podnětné prostředí vybízející k aktivním činnostem žáka mohou posloužit tzv. **kalendářové úlohy**.

- Jestliže v jednom měsíci (31 dní) je 5 pondělků, pak v tomtéž měsíci nemůže být:
(A) 5 sobot
(B) 5 nedělí
(C) 5 úterý
(D) 5 střed
(E) 5 čtvrtků (Klokánek, převzato z <http://matematickyklokan.net/sborniky.php>.)

Kalendářové úlohy jako vhodný příklad užití zbytkových tříd (konkrétně zbytků po dělení sedmi) v praktickém životě jsou i vhodnou motivací pro dělení se zbytkem. Podobné úlohy mohou aktivně řešit už i děti v nižších třídách prvního stupně, pokud mají k dispozici kalendářovou tabulku (viz obr. 6). Práci s kalendářovými tabulkami doporučují ve svých učebnicích pro mladší žáky primární školy i zkušení autoři německých učebnic matematiky, didaktici matematiky E. Wittmann a G. Müller (1990).

			1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	
13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	
27	28	29	30	31			

Obrázek 6 – kalendářová tabulka

Na druhém stupni základní školy mohou děti aktivně pokračovat složitějšími kalendářovými úlohami, např.:

- *Tři úterky v měsíci mají sudé datum. Který den v týdnu byl 21. toho měsíce?* (Kadet, převzato z <http://matematickyklokan.net/sborniky.php>.)
- *Může se stát, aby v některém roce nebyl ani jeden pátek 13.?* (Volfová, 2005)
- *Může se stát, aby v některém roce nebylo určité pořadové číslo dne ani jednou nedělí?* (Volfová, 2005).

1.5 Práce s chybou

Jak vhodně pracovat s chybou žáka či žáků naznačuje ukázka, vztahující se ke středové a osově souměrnosti v 8. ročníku (viz Stehlíková, Cachová, 2006):

„...Žáci při práci s geoboardem (čtvercovou destičkou s 5 x 5 kuličky) dostali od učitele pokyn vyznačovat pomocí napnuté gumičky útvary osově souměrné nebo středově souměrné. Jak se při práci ukázalo, některé z dětí nedokázaly rozlišit, které útvary jsou pouze středově souměrné, které pouze osově souměrné a které jsou středově i osově souměrné. Učitel proto těmto dětem zadal další činnosti – rozřadit podle druhů symetrie písmena velké tiskací abecedy. K tomu měly využít překládání papíru a práci s napnutým provázkem.

Nesprávná představa symetrických útvarů zde nebyla penalizována, ale naopak využita jako odrazový můstek další práce. Manipulace s papírem či provázkem sloužila jako účinný nástroj zjišťování souměrnosti či nesouměrnosti útvarů...“

Na prvním stupni je podobně možné využít práci s chybou například při hledání různých sítí krychle. Není vhodné, aby učitel žákům napovídal, který z jejich nákresů, zakreslených do čtverečkováného papíru, je skutečně sítí krychle. Daleko vhodnější je děti pobídnout, aby síť vystříhly a pokusily se model krychle sestavit (popř. mohou k tomuto účelu využít některou vhodnou stavebnici – příklad na obr. 7).



Obrázek 7 – ukázka stavebnice, vhodné pro hledání sítí krychle

1.6 Správné porozumění

Učitel se může dále učit také tím, že provádí zpětnou reflexi své vlastní praxe. Na různorodé situace, které školní praxe přináší, se snaží citlivě reagovat, hledat, jak jinak a lépe mohla být daná situace vyřešena, jak jinak mohl v daný moment zareagovat. Učitelé na školách mohou v malých skupinách (ve dvojici nebo v trojici) s kolegy o těchto situacích diskutovat. Důležité je najít pro diskuzi na škole partnery. Efektivní diskuze podstatně přispívají ke zlepšení výuky. V poslední době se v evropské didaktice matematiky rozmáhá relativně nový fenomén, pocházející původně z Japonska, tzv. lesson study. Jde o realizaci otevřených hodin pro kolegy učitele, kteří výuku sledují. Po hodině následuje společný rozbor s diskuzí, který je přínosem jak pro učitele, který výuku vedl, tak pro učitele, kteří jí byli přítomni.

Reflexe pomáhá učiteli všimnout si myšlenkových pochodů žáka, je možné provádět **analýzu a priori** (tj. před samotnou hodinou, jak žák bude nejspíš danou úlohu řešit, jaká řešení od žáků můžeme očekávat atd.) a **analýzu a posteriori** (po hodině, jak výuka probíhala, jak žáci na úlohy reagovali, která řešení použili).

Takový přístup ze strany učitele vede k tomu, že se skutečně zajímá o to, zda jím použité metody vedly u žáků k porozumění.



Kontrolní otázky

1. Navrhněte aktivitu, která rozvíjí tvořivost žáka.
2. Popište chybu žáka, která je způsobena špatným porozuměním podstatě věci, a navrhněte postup, jak ji napravit.
3. Popište svou vlastní hodinu, o níž se domníváte, že v ní byli žáci vhodným způsobem motivováni k aktivní a tvořivé činnosti.
4. Ze své vlastní učitelské praxe vyberte nedávno odučenou hodinu matematiky a popište ji z hlediska pěti tezí podnětné výuky.
5. Posuďte citát B. Součkové o potřebě vhodné atmosféry pro tvořivou práci v hodinách matematiky (z kapitoly 1.1).



Souhrn

Dobrému učiteli jde především o to, aby jeho žáci dokázali matematiku skutečně užívat a dobře jí rozuměli. Nestaví tedy na rychlosti a reprodukování, ale na zájmu žáků o práci s podnětnými úlohami. Diagnostiku chyby využívá k nahlížení do vnitřního světa žáka, aby mu dokázal pomoci lépe a správně porozumět pojmům a postupům, vidět vzájemné vztahy a souvislosti. Jednou z možností, jak zlepšit vlastní učitelskou praxi, je reflektovat své vlastní hodiny, provádět tzv. analýzu a priori před výukou a analýzu a posteriori po její realizaci. Tyto reflexe je možné provádět kolektivně v menších skupinkách tzv. metodou lesson study.



Literatura a zajímavé odkazy

- HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F. A KOL. *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2011.
- KOMENSKÝ, J. A. *Didaktika analytická*. Praha: 1947.
- KUŘINA, F. *Matematika je řešení úloh*. MFI, roč. 13, č. 3. Praha: Prometheus, 2003.
- KUŘINA, F. *Může být školská matematika matematikou dobrou?* Pokroky matematiky, fyziky, astronomie, 53, 2008.
- MA, L. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. New Persey: LEA, 1999.
- SOUČKOVÁ, B. *Neboj se matematiky*. Praha: SPN, 1992.
- STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. *Konstruktivistický přístup k vyučování a praxe*. In: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. Praha: JČMF, 2006.
- TAO, T. *Co je dobrá matematika?* Pokroky matematiky, fyziky, astronomie, 53, 2008.
- VOLFOVÁ, M.: „Kalendářové úlohy“ – inspirující problémy pro matematické talenty na ZŠ. In: *Ani jeden matematický talent nazmar*. Praha: PedF UK, 2005.
- VRÁNOVÁ, J. *Rozvíjení matematických představ žáků 1. stupně ZŠ*. Diplomová práce. PdF UHK, Hradec Králové, 2006.
- WITTMANN, E., MÜLLER, G. *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH, 1990.

- *Matematický klokan – sborníky*. Dostupné on-line:
<http://matematickyklokan.net/sborniky.php>.



2 Některá zajímavá matematická prostředí a práce v nich



Cíle

V této kapitole se seznámíte:

- s možnostmi založit vyučování na práci se zajímavými prostředími.

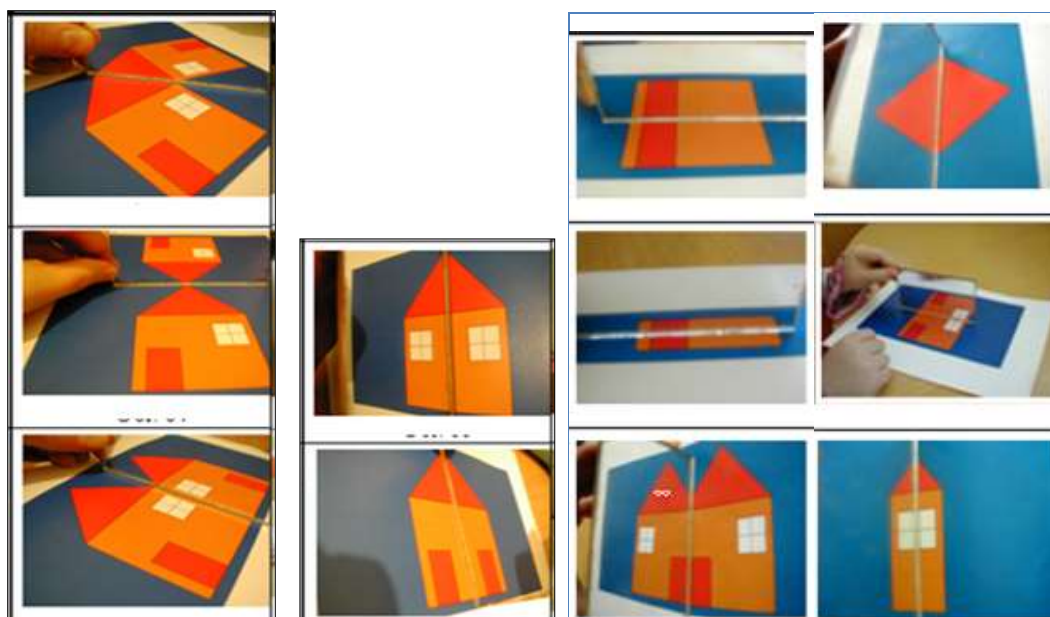


Pojmy k zapamatování

- zajímavá matematická prostředí
- Hejného metoda
- budování správných představ
- uchopování reálných situací
- práce s úlohou

2.1 *Zajímavá matematická prostředí*

V kapitole 1.3 bylo řečeno, že práce s podnětným prostředím je v první řadě založena na vhodných úlohách, které podpoří u žáků budování správných představ a porozumění podstatě problému. Zároveň musí být prostředí pro žáka dostatečně zajímavá, aby jej motivovala k aktivní matematické práci. Nestačí jen vybrat vhodnou aplikační nebo problémovou úlohu, ale především s vybranou úlohou vhodně pracovat. To rozhodně neznamená předložit žákům hotový návod k řešení úlohy v podobě posloupnosti konkrétních kroků, ale nechat žáky řešení úlohy hledat samostatně nebo ve skupinkách (s případnou postupně odstupňovanou nápovědou podle individuálních potřeb žáků).



Obrázek 8 – hra se zrcadly (Zdroj: Balcarová, 2011)

Takovým prostředím může být například i hra se zrcadly. J. Balcarová se ve své diplomové práci (2011) zaměřila na předškolní věk, ovšem použité činnosti je možné využít i v nižších ročnících primární školy.

J. Balcarová využila obrázků jednoduchého domečku složeného z geometrických tvarů. Děti si hrály s obrázkem a zrcátkem, a přitom sledovaly, jaké nové obrázky jim pomocí zrcátka vznikají (viz obr. 8). Přitom zjišťovaly, že záleží na tom, kam zrcátko na domeček přiloží. Samy pak pojmenovávaly nové obrázky, které jim při práci vznikaly – např. domečky spojené střechou, domeček, který nemá žádné okno, domeček, který má dvě okna, ale žádné dveře atd. Další možnosti mohou děti hledat pomocí tzv. dvojjzrcadla – tj. pohyblivě spojené dvojice zrcátek.

2.2 Některá zajímavá prostředí v matematice primární školy a druhého stupně základní školy

V současné době je na práci se zajímavými prostředími založena nová řada učebnic autorského kolektivu M. Hejného z nakladatelství Fraus. Žáci pracují v různých prostředích, samostatně tak objevují matematiku. Hejného metoda vychází z přesvědčení:

„...Když děti znají prostředí, ve kterém se dobře cítí, nerozptylují je neznámé věci. Plně se soustředí jen na daný úkol a neřeší neznámý koncept. Každé ze zhruba 25 použitých prostředí funguje trochu jinak (rodina, cesta autobusem, prosté krokování na hřišti...). Systém prostředí je motivačně nastaven tak, aby zachytil všechny styly učení se a fungování dětské mysli. Ta je pak motivována k dalším experimentům. Prostředí obsahuje série na sebe navazujících úloh se stejným námětem. V úlohách se vyskytují různé matematické jevy. Všechna prostředí nabízejí úlohy, ve kterých se prolíná několik matematických jevů. Úlohy vybízejí k experimentování a k objevování...“ (citováno z <http://www.h-mat.cz/principy/prostredi>).

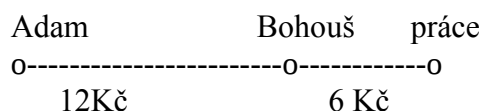
Podrobné ukázky práce v didaktickém prostředí **hadi** a v prostředí **krokování a schody** jsou volně dostupné na stránkách, věnovaných Hejného metodě (<http://www.h-mat.cz/principy/prostredi>). Hejného metoda počítá i s navazujícími učebnicemi pro druhý i třetí stupeň (v současné době jsou vydány učebnice pro šestý ročník).

Zajímavá matematická prostředí ale nenajdeme pouze v učebnicích podle Hejného metody. Také další autoři pracují se zajímavými prostředími.

Příkladem takového výukové prostředí může být užití příběhu, který reprezentuje určitou matematickou situaci (krátký text s jednoduchou dějovou linií a popisem situace z reálného života, který obsahuje nosnou matematickou myšlenku – tzv. *uchopování reálných situací*). Žáky je tak možné uvést vhodným způsobem do matematického problému a motivovat je k jeho řešení.

Uveďme zde nyní příklad z uchopování situace nazvané „**Individuální doprava**“ podle M. Tiché (in Hošpesová, Kuřina, 2011), která se problematice uchopování reálných situací dlouho věnovala:

„...Adam a Bohouš jezdí každý svým autem, po stejné trase, ale ze dvou různých míst do stejného místa zaměstnání. Adama stojí jedna cesta do práce 18 Kč, Bohouše 6 Kč. Náklady na 1 kilometr jízdy mají stejné. Co nás může zajímat, na co se můžeme ptát?



Obrázek 9

Žáci začali tvořit otázky typu: Kolik Kč utratí za cesty do práce za týden Adam? O kolik Kč utratí Adam za týden víc než Bohouš? Pak se objevila otázka: Kolik Kč by mohli ušetřit, kdyby Adam vozil Bohouše? Následovaly další otázky: Kolik Kč má dát Bohouš Adamovi? Kolik Kč má chtít Adam od Bohouše? A jak to udělat, aby to bylo spravedlivé? Žáci postupně navrhli různé strategie dělení nákladů (Například: nejdřív platí Adam, potom Bohouš; na stejné části; podle počtu cestujících osob; v poměru podle vzdáleností, kolik ušetří každý.) V prostředí třídy byla vyvolána živá diskuse, ve které se objevily úvahy a argumenty ze všech tří uvedených oblastí...



Kontrolní otázky

1. Vyberte jedno zajímavé prostředí z Hejného metody a prostudujte si jej.
2. Sestavte k tomuto prostředí další dvě úlohy.
3. K uchopování situace *Individuální doprava* rozpracujte další možnosti, kudy se diskuze s žáky a jejich následná práce na problému může ubírat.
4. Vyberte nějakou vhodnou reálnou situaci, která by se mohla stát prostředím pro práci v matematice.



Souhrn

Práce s podnětným prostředím je založena na vhodných úlohách, které podpoří u žáků budování správných představ a porozumění problému. Zároveň musí být prostředí pro žáka dostatečně zajímavé, aby jej motivovalo k aktivní matematické práci.



Literatura a zajímavé odkazy

- BALCAROVÁ, J. *Pravidelnosti a shodnosti v předškolním vzdělávání*. Diplomová práce. Hradec Králové: PdF UHK, 2011. Dostupné on-line: http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/cachoj1/MS/2010/balcarova_dp.pdf.
- HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F. A KOL. *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2011.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Průručka učitele, Matematika pro 1. ročník základní školy*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2007.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Průručka učitele, Matematika pro 2. ročník základní školy*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2008.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Průručka učitele, Matematika pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2009.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. *Průručka učitele, Matematika pro 4. Ročník základní*

školy. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2010.

- HEJNÝ, M, JIROTKOVÁ, D. *Příručka učitele, Matematika pro 5. ročník základní školy*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2011.
- *Hejného metoda. Zasloužená radost z poznání*. [cit. 2015-02-22]. Dostupný z WWW: < <http://www.h-mat.cz/> >.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3 Využití didakticko-matematických apletů ve vyučování matematice



Cíle

V této kapitole se seznámíte:

- s knihovnami didakticko-matematických apletů NLVM a NCTM;
- s možnostmi využití jejich apletů ve vyučování matematice.

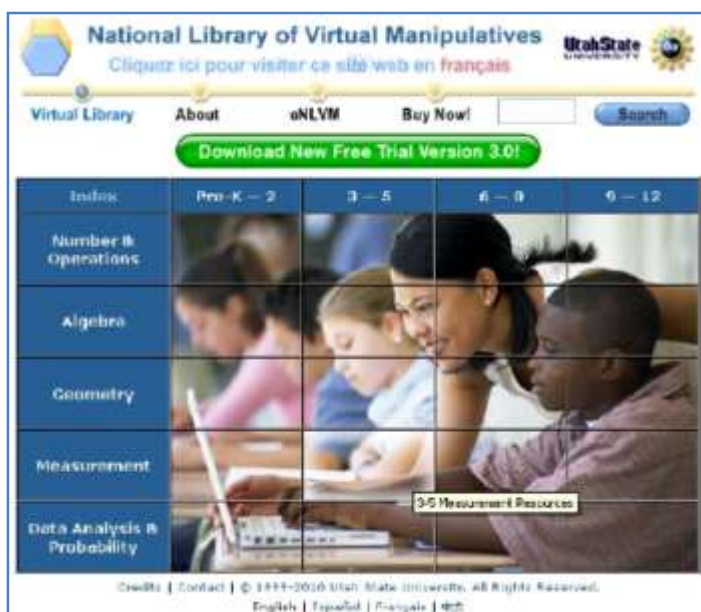


Pojmy k zapamatování

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| • didakticko-matematický aplet | • digitální učební materiál DUM | • názornost |
| • knihovna NCTM | • vlastní prožitá zkušenost | • dobré fungování matematiky |
| • knihovna NLVM | | • tvořivost |

3.1 Didakticko-matematické aplety

Pro děti jsou dnes počítače zcela běžným vybavením domácnosti, podobně jako televize, chladnička nebo pračka. Přirozeně tedy očekávají, že bude výpočetní technika provázet i jejich školní práci. Pro většinu škol jsou už počítačové učebny či interaktivní tabule běžnou výbavou. Otázkou ale stále zůstává, jak moderní techniku smysluplně začlenit do vyučování matematice na základní škole, aby nešlo jen o pouhé hraní si s počítačem a ozvláštnění výuky. Je třeba zajistit, aby začlenění výpočetní techniky do vyučování i z pohledu didaktiky matematiky přinášelo něco navíc a přispělo k utváření správných matematických představ žáka.



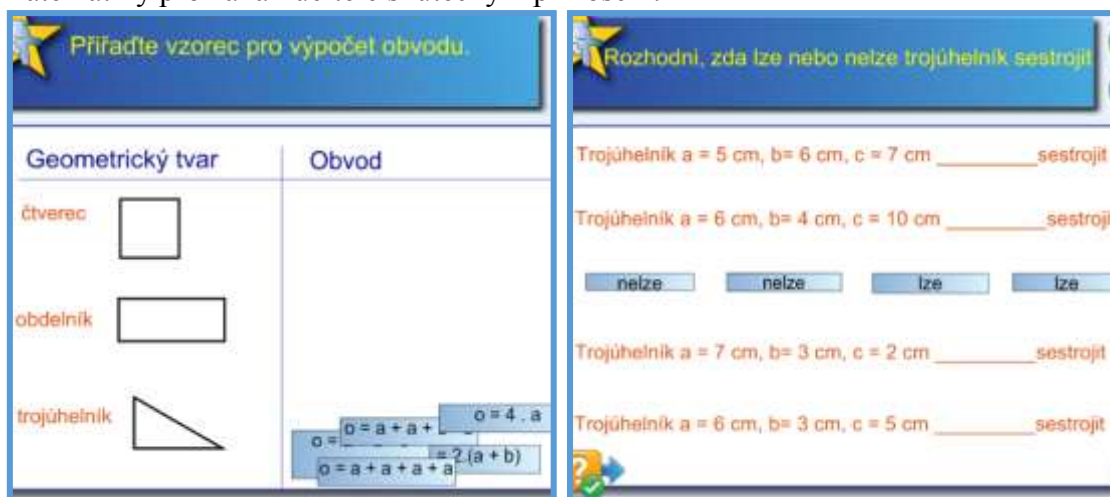
Obrázek 10 – knihovna NLVM (Zdroj: <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>)

Jednou z možností využití moderní techniky je práce s hotovými aplety, volně dostupnými na internetu. V této kapitole se podíváme podrobněji na stránky **NLVM** (*National Library of Virtual Manipulatives*, <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>), které nabízejí sérii zajímavých matematických prostředí z oblasti aritmetiky, geometrie, algebry, teorie míry, pravděpodobnosti atd. Využít je mohou učitelé základní i střední školy, protože prostředí jsou rozčleněna podle věku žáků – od nejmladších až po nejstarší (viz obr. 10). Dále se zaměříme na podobnou volně dostupnou knihovnu didakticko-matematických apletů **Illuminations NCTM** (National Council of Teachers of Mathematics, <http://illuminations.nctm.org/>). Obě knihovny (NLVM i NCTM) navíc nabízejí několik prostředí, využitelných již v předškolním věku (nabídka Pre-K – 2 pro předškolní období až druhou třídu primární školy).

Jedinou podmínkou úspěšné práce s aplety je nainstalovaná Java. Knihovna NLVM umožňuje stáhnout aplety do počítače, nemusí se s nimi pracovat on-line.

3.2 Využití knihovny NLVM ve vyučování matematice

Ne všechny digitální materiály, dostupné na internetu, musí být z pohledu didaktiky matematiky pro žáka i učitele skutečným přínosem.



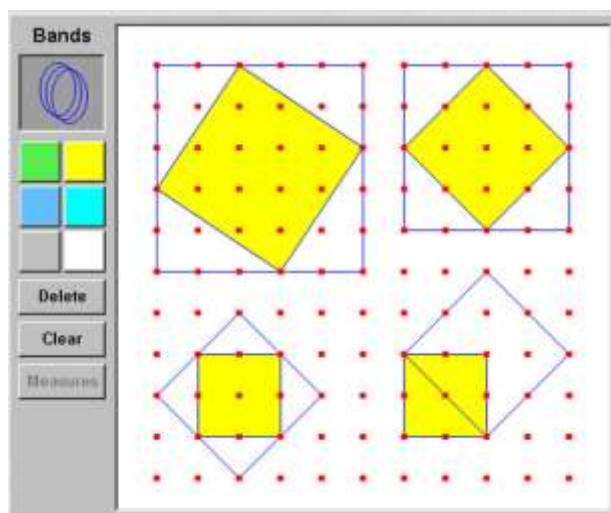
Obrázek 11 (Zdroj: <http://www.veskole.cz/dumy/zakladni-skola-1-stupen/geometrie-1>)

Ukázky digitálních učebních materiálů (tzv. DUMů) z obr. 11 dokládají, že důraz na vlastní prožitou zkušenost postupně mizí už v průběhu prvního stupně základní školy a že ani ICT učební materiál není zárukou toho, že bude maximálně využívat názornost. Mnohé z digitálních materiálů jsou jen obdobou papírové verze úloh. Přestože předpokládáme, že žáci, pro které je DUM na obr. 11 určen, pouze opakuji z předchozích hodin, postrádáme u materiálu možnost pokusit se u trojúhelníkové nerovnosti složit z daných stran trojúhelník, u vzorců pro obvod pak ověřit správnost volby odpovědi přiložením připravených stran na obrazec.

Ukažme tedy na vybraných prostředích knihovny **NLVM** protipříklad – příklad dobrého fungování matematiky prostřednictvím vhodných podnětných úloh a činností.

Porozumění pojmu **obsah čtverce** lze rozvíjet například pomocí apletu **geoboard** (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_277_g_1_t_3.html?open=activities&from=category_g_1_t_3.html):

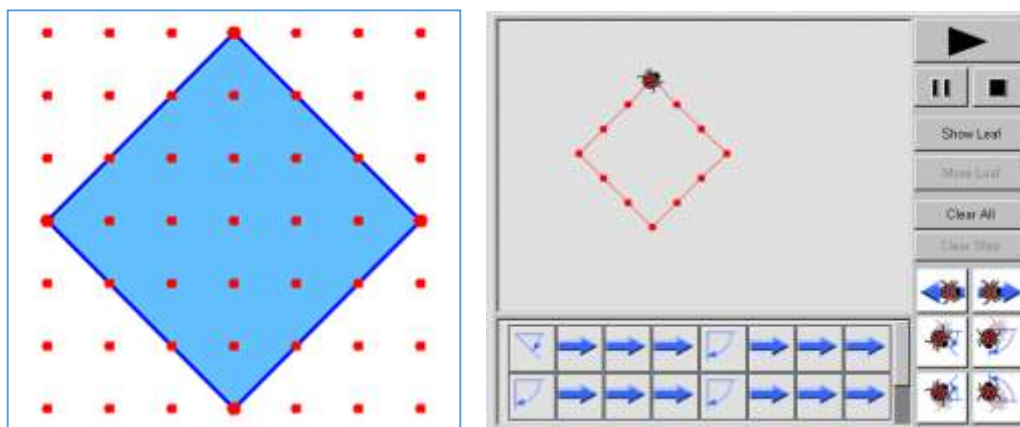
- Bude pro všechny dvojice čtverců na obr. 12 platit, že je obsah žlutého čtverce poloviční než obsah čtverce, se kterým se překrývá?



Obrázek 12 (vytvořeno pomocí <http://nlvm.usu.edu>)

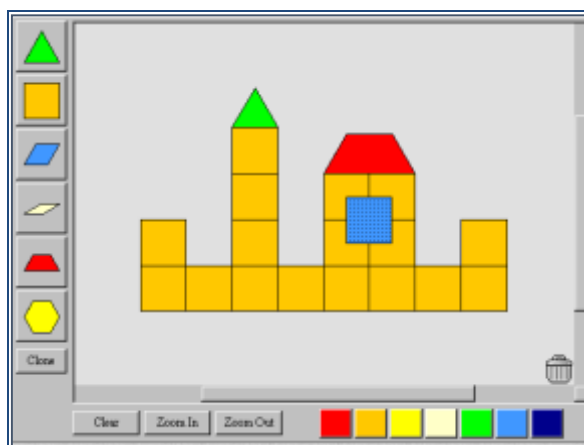
Činnosti s geoboardem (obr. 13) lze provázat s apiletem **pohyb berušky** (obr. 14), http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_141_g_1_t_3.html?open=activities&from=category_g_1_t_3.html):

- Naučte berušku nakreslit čtverec, vypnutý gumičkou na geoboardu. Vypínejte na geoboardu další čtverce (různých velikostí) a učte je berušku zakreslovat.



Obrázky 13 a 14 (vytvořeno pomocí <http://nlvm.usu.edu>)

Příkladem dalšího prostředí může být **mozaika z geometrických tvarů** pro nejmladší (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_169_g_1_t_3.html?open=activities&from=category_g_1_t_3.html, obr. 15).



Obrázek 15 (vytvořeno pomocí <http://nlvm.usu.edu>)

3.3 Využití knihovny NCTM ve vyučování matematice

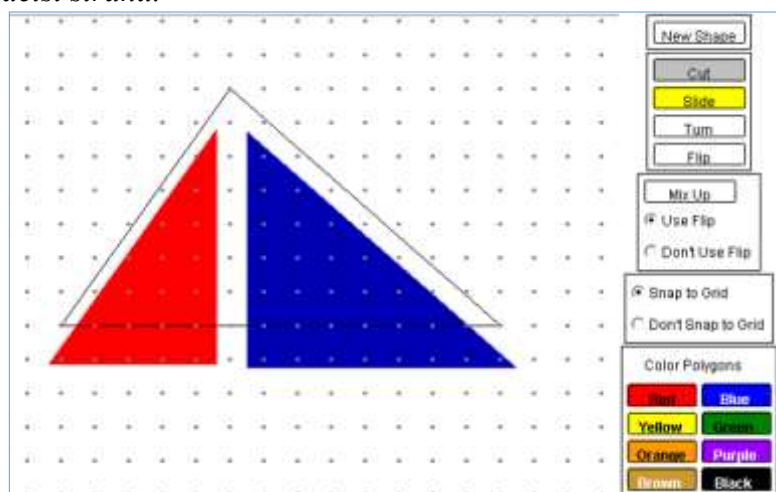
Nyní se podíváme podrobněji na knihovnu *Illuminations NCTM* (viz její logo na obrázku 16).



Obrázek 16 – logo knihovny NCTM (Zdroj: <http://illuminations.nctm.org/>)

Prostředí apletu z obr. 17 (<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=72>) také využívá *sít' mřížových bodů*. Žáci v této síti vytýčují útvary, které mohou dále rozložit na dílčí podútvary a s nimi manipulovat, např.:

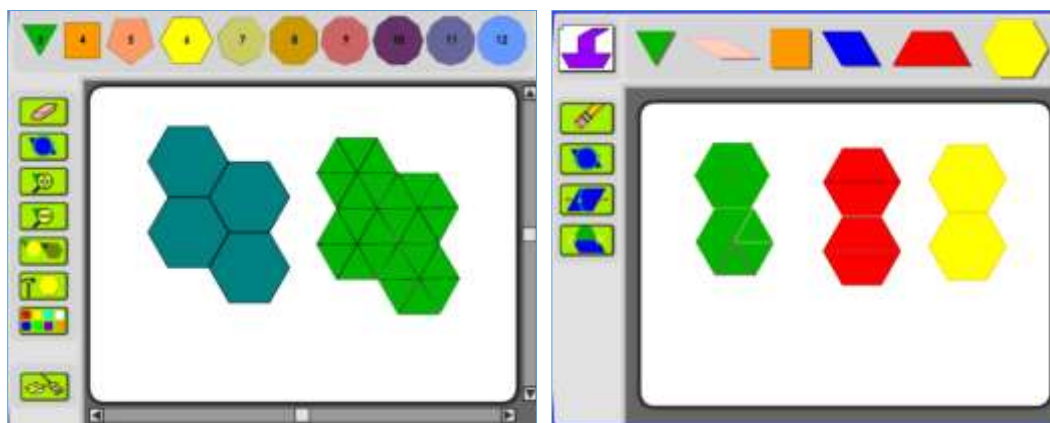
- Rozděl trojúhelník na dva jiné trojúhelníky za pomoci jeho výšky (popř. těžnice) na nejdelší stranu.



Obrázek 17 (vytvořeno pomocí <http://illuminations.nctm.org/>)

Aktivita s apletem na *pokrývání roviny* pravidelnými mnohoúhelníky (teselace, obr. 18, <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=202>) názorně ukazuje, že je možné prostor vyplnit různě velkou jednotkou. Na obr. 19 je k téže aktivitě, jinak propedeutice převádění jednotek obsahu, využit aplet *tvoření obrázků z geometrických tvarů*, <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=27>, který je obdobou apletu

mozaika z geometrických tvarů z NLVM (obr. 15).



Obrázky 18 a 19 (vytvořeno pomocí <http://illuminations.nctm.org/>)



Kontrolní otázky

1. Vyzkoušejte samostatně některý z apletů knihovny NLVM kategorie 3 – 5.
2. Vyzkoušejte samostatně některý z apletů knihovny NLVM kategorie 6 – 8.
3. Vyzkoušejte samostatně některý z apletů knihovny NCTM kategorie 3 – 5.
4. Vyzkoušejte samostatně některý z apletů knihovny NCTM kategorie 6 – 8.
5. Hledejte příklad DUMu, který není z pohledu didaktiky matematiky nijak zvlášť přínosný.



Souhrn

Začlenění výpočetní techniky do vyučování musí z pohledu didaktiky matematiky přinášet něco navíc (mít určitou přidanou hodnotu, nenahrazovat pouze činnosti, které mohou žáci dobře vykonávat i bez prostředků výpočetní techniky, právě užitím prostředků ICT). Důležité je, aby vyučování, podporované výpočetní technikou, přispívalo k utváření správných matematických představ žáka, to znamená, aby nesklouzávalo k pouhé prezentaci hotových poznatků bez provázanosti na bezprostřední získávání zkušeností vlastní aktivní činností žáka.

Jednou z možností využití moderní techniky je práce s hotovými aplety, volně dostupnými na internetu. Jsou to například stránky *NLVM (National Library of Virtual Manipulatives)*, <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html> a *Illuminations NCTM* (National Council of Teachers of Mathematics, <http://illuminations.nctm.org/>). Obě knihovny nabízejí sérii zajímavých matematických prostředí z oblasti aritmetiky, geometrie, algebry, teorie míry, pravděpodobnosti atd. Využívat je mohou učitelé základních i středních škol, prostředí jsou rozdělena podle věku žáků.



Literatura a zajímavé odkazy

- *Illuminations NCTM* [online]. National Council of Teachers of Mathematics, 2000 – 2015 [cit. 2015-02-22]. Dostupný z WWW: < <http://illuminations.nctm.org/> >.
- *National Library of Virtual Manipulatives (NLVM)* [online]. Utah State University, 1999 – 2015 [cit. 2015-02-22]. Dostupný z WWW:

<<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>>.

- STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. *Konstruktivistický přístup k vyučování a praxe*. In: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. Praha: JČMF, 2006.
- HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001/2009. ISBN 80-7178-581-4.
- KUŘINA, F., A KOL. *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1743-7.
- KUŘINA, F. *Problémové vyučování v geometrii*. Praha: SPN, 1976.



4 On-line dostupné výpočetní nástroje



Cíle

Po prostudování této kapitoly:

- Získáte přehled o kvalitních on-line dostupných výpočetních nástrojích.
- Seznámíte se s českými i anglickými webovými stránkami.



Pojmy k zapamatování

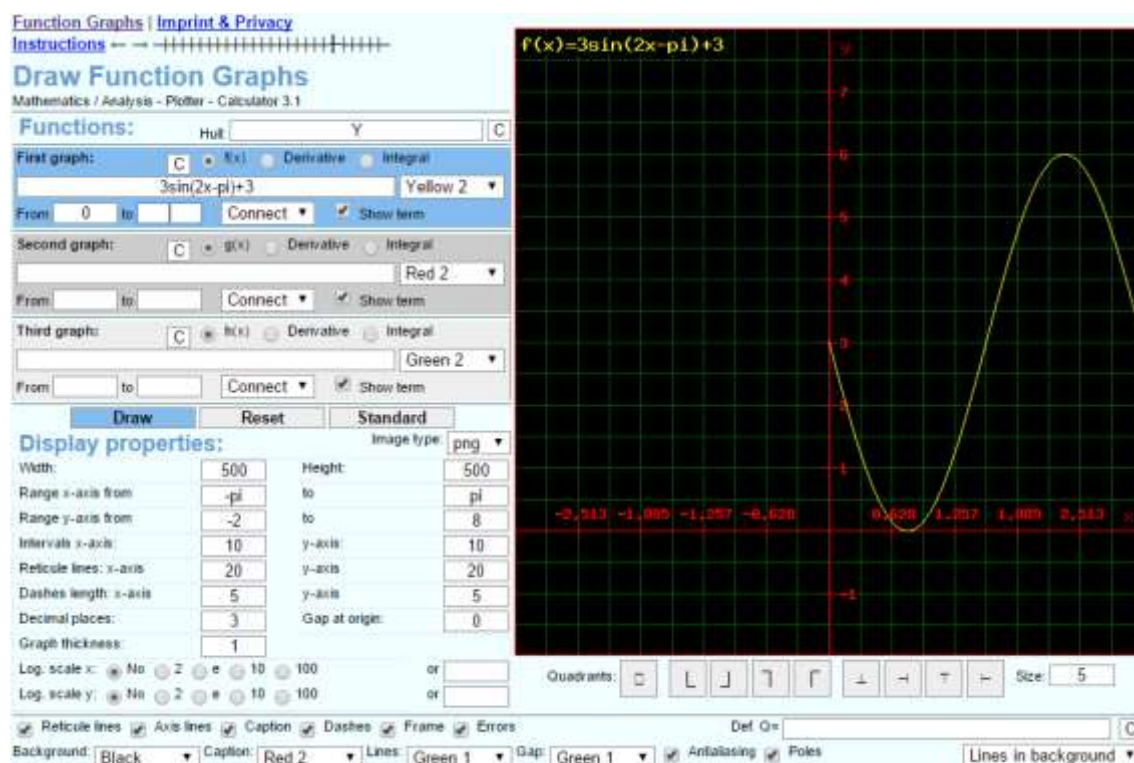
- Draw Function Graphs
- Wolfram Alpha
- Fooplots
- Matematické výpočty online (MAW)

4.1 Draw Function Graphs

Webová stránka *Draw Function Graph* (<http://rechneronline.de/function-graphs>) představuje jeden ze základních nástrojů pro tvorbu grafu reálné funkce jedné proměnné. Jako ukázková příklad pro práci s tímto programem uvažujeme funkci:

$$y = 2 \sin(2x + \pi) + 3.$$

Zmíňme nejprve některé její vlastnosti. Jedná se o goniometrickou funkci s periodou délky π . Její obor hodnot představuje interval $\langle 0, 6 \rangle$, definiční obor je obecně roven množině všech reálných čísel. Pro ilustraci však uvažujeme pouze kladná x . Podívejme se nyní, jakým způsobem s webovou stránkou můžeme pracovat (Obrázek 20).



Obrázek 20 – Draw Function Graph

Do editovacího modře orámovaného pole (nahore vlevo) napíšeme podle obecných zásad vkládání matematických vzorců předpis uvažované funkce. Vpravo v rozbalovacím poli můžeme zvolit požadovanou barvu grafu. Vzhledem k uvažovanému definičnímu oboru píšeme do pole *From* hodnotu 0, pole *to* necháme nevyplněné, tím vyjadřujeme příslušnou neomezenost daného intervalu.

V nabídce *Display properties* editujeme požadované vlastnosti zobrazení nákresny. Shora první možností, *Image type* volíme typ obrázku grafu funkce. Máme jej totiž možnost při poklepání pravým tlačítkem nákresnu stáhnout ve formátu png, gif nebo jpeg. *Width* a *Height* jsou počty pixelů jednotlivých rozměrů obrázku. Originálně jsou nastavené na 500 v každém směru. Takové hodnoty pro běžné použití většinou stačí, nicméně můžeme graf v tomto směru podle libosti přizpůsobit. *Range* souřadnicových os umožňuje nadefinovat rozsah jejich zobrazování. Pro ukázkou volíme x -ovou souřadnici od $-\pi$ do π , neboť pro goniometrické funkce je uvažování násobků π na ose x významné.

Dalšími příkazy dovedeme editovat další vlastnosti zobrazení nákresny. Týkají se změny rozvržení mřížky, barvy souřadnicových os apod. Závěrem ještě zmiňme možnost zobrazení příslušných kvadrantů souřadného systému nebo případně jejich dvojic. Vpravo od nadpisu *Quadrants* lze poklepáním na jednotlivá šedá tlačítka rychle ukázat požadovanou část nákresny.



Poznámka

Není možné a pravděpodobně by ani nebo nosné popsat na rozumném rozsahu textu všechny funkce webové stránky *Draw Function Graph*. Doporučujeme proto čtenáři samostatně objevovat nejrozumnější možnosti tohoto on-line nástroje.

4.2 Fooplot

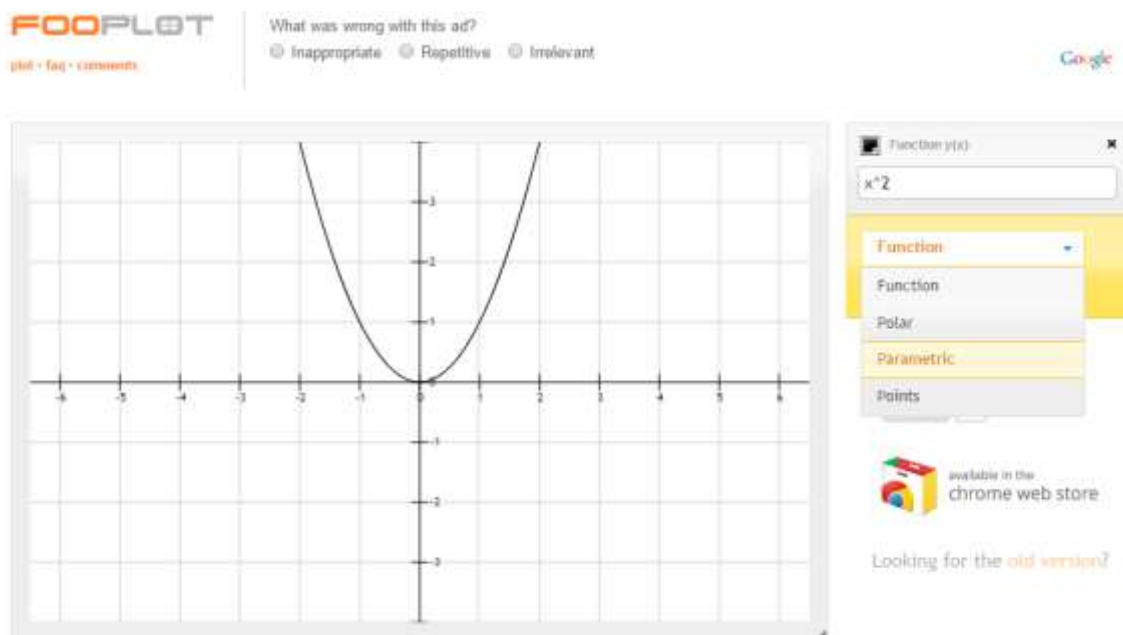
On-line dostupný nástroj *Fooplplot* (<http://fooplplot.com>) je srovnatelný s výše představovaným prostředím. Z uživatelského hlediska je v jistém smyslu přívětivější. Má jednodušší ovládací grafické prvky, do jisté míry však umožňuje méně funkcí. Jeho používání bychom představili na kreslení křivek daných parametrickými rovnicemi a rovněž v jejich v porovnání s explicitně zadanými funkcemi.

Při otevření webové stránky se automaticky zobrazí graf explicitně zadané funkce $y = x^2$. Její předpis je napsán vpravo nahore v příslušném editovacím poličku. Můžeme jej samozřejmě jakkoliv upravit. Chceme-li pracovat s parametrickým vyjádřením křivek, rozbalíme nabídku v přidávacím poli další křivky a požadovaný způsob zadání zvolíme. Je vidět, že vedle parametrického určení, resp. kartézských souřadnic, můžeme pracovat i s polárními souřadnicemi nebo zadávat „pouze“ souřadnice bodů (viz Obrázek 21).

Křížkem vpravo nahore lze zobrazenou kvadratickou funkci vymazat, pokud chceme. Porovnávání parametrického vyjádření s explicitním může dobře posloužit při studiu analytické geometrie v rovině. Jednou ze základních úloh této disciplíny je bezpochyby převod parametrických rovnic přímky na obecnou a opačně.

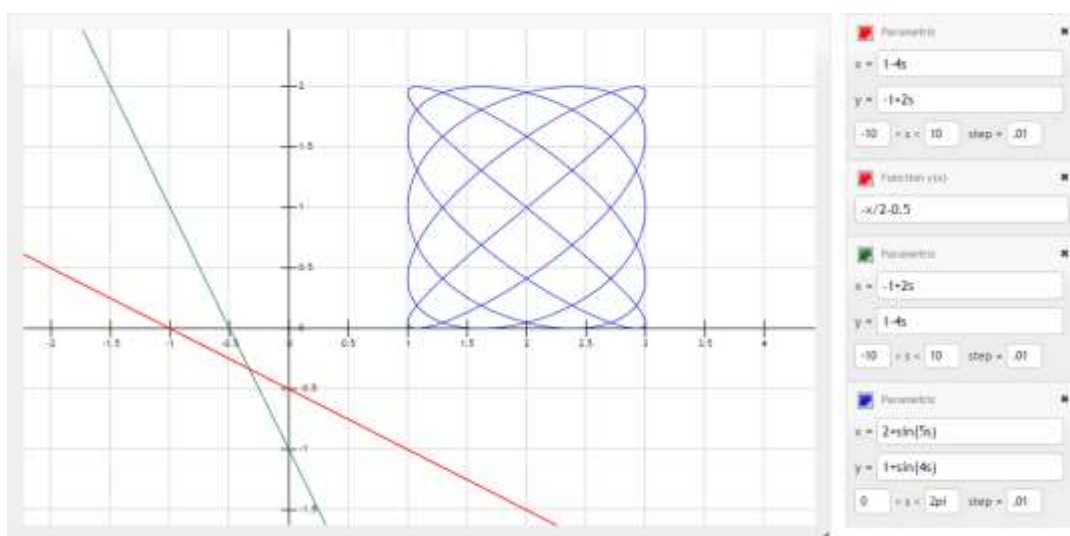
Jako ilustraci uvažujeme přímku danou rovnicemi $x = 1 - 4s$, $y = -1 + 2s$, $s \in \mathbb{R}$. Zdůrazníme, že v programu *Fooplplot* je parametr pojmenován s , musíme toto značení pro správnou funkci respektovat. Rovnice zadáme do příslušných polí, přímka se vykreslí. Můžeme ji barevně upravit a změnit rozsah jejího zobrazení. Daná přímka má obecnou rovnici $x + 2y + 1 = 0$, resp. je grafem lineární funkce $y = -0,5x - 0,5$. Pokud druhý jmenovaný předpis zadáme k vykreslení jako další (explicitně zadanou) funkci, přímky splývají. Správnost našeho převodu mezi jedním a druhým vyjádřením

přímky tedy máme vizualizovaný.



Obrázek 21 – Fooplot, zadání parametrického vyjádření

Dalším „hram“ s tímto programem se nekladou meze. Zajímavé je například porovnávat inverzní funkci k lineární funkci s přímkou danou parametrickými rovnicemi. Chceme-li zobrazit graf inverzní funkce k naší uvažované $y = -0,5x - 0,5$, stačí pouze prohodit parametrická vyjádření x a y této přímky. Na nárysň přitom uvidíme známé tvrzení, že graf inverzní funkce je osově souměrný s grafem původní funkce podle přímky $y = x$. Dále nám „parametrické prostředí“ Fooplotu umožňuje zobrazovat tzv. Lissa-jousovy obrazce, neboli skládání dvou kolmých kmitů. Získáme jej zadáním „kom-binace“ goniometrických funkcí sinus a kosinus do vyjádření x a y (viz Obrázek 22, modrá křivka).



Obrázek 22 – Fooplot, příklady



Poznámka

Lissajousovy obrazce jsou pojmenovány podle Julese Antoine Lissajouse (1822–1880). Tento francouzský fyzik se zabýval vlnami a kmity, vyvinul metodu studia této problematiky. Pomocí odrazu paprsku světla, jež se dotýkalo zdroje zvuku, zkoumal vlastnosti tohoto mechanického kmitání.

4.3 Wolfram Alpha

Webové rozhraní *Wolfram Alpha* (<http://www.wolframalpha.com>, Obrázek 23) bylo vytvořeno a uživatelům zpřístupněno firmou *Wolfram Research* v roce 2009. Jedná se o tzv. odpovídací stoj, jenž se „snaží“ přímo zodpovědět vložené otázky. V tomto se liší od webových vyhledávacích služeb, jež podávají v podstatě pouze seznam stránek s hledanými informacemi. Podstata *Wolframu Alpha* je založena na základě výpočetního softwaru *Mathematica*, jenž slouží k řešení algebraických úloh, příkladů numerických a statistických výpočtů apod.



Obrázek 23 – Wolfram Alpha

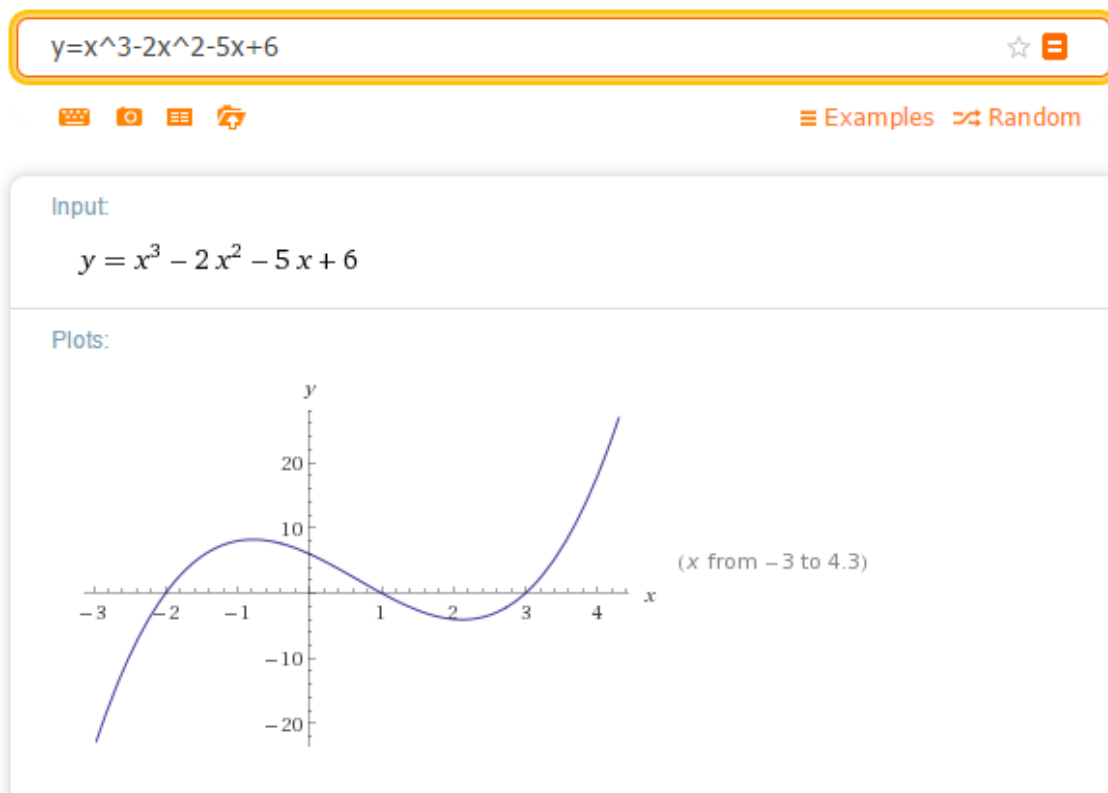
Pro ukázkou práce s *Wolframem Alpha* rozebereme vlastnosti polynomické funkce

$$y = x^3 - 2x^2 + 5x + 6.$$

Chceme vyšetřit její průběh. Vzhledem k tomu, že se nejedná o elementární předpis, resp. se středoškolskými znalostmi (zpravidla) druhého ročníku bychom nevystačili, použili bychom jako nástroj diferenciální počet. Nejprve však poznamenejme, že definiční obor jsou všechna reálná čísla a obor hodnot rovněž (předpisem je polynom třetího stupně). Ze začátku bychom hledali průsečíky grafu se souřadnými osami. Nalézt P_y je triviální, pro P_x však musíme vyřešit kubickou rovnici

$$x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Na střední škole bychom tento problém řešili uhodnutím jednoho kořene, jehož hodnota bývá „překvapivě“ takřka vždy rovna 1 nebo -1 . Následně bychom rozložili polynom na součin a řešili v podstatě rovnici v součinném tvaru. Přejdeme nyní k *Wolframu Alpha* a předvedme, jakým způsobem můžeme tímto on-line nástrojem naše řešení celého průběhu dané funkce zkontrolovat nebo vůbec nechat vytvořit.



Obrázek 24 – Wolfram Alpha, graf funkce

Do vstupního oranžově ohraničeného pole napíšeme zadání naší funkce a stiskneme klávesnici Enter (případně oranžové „rovná se“ vpravo). Program po chvilce zobrazí řešení jako „roletu“ pod úvodním editovacím polem. Nejprve jsou po sobě seřazeny grafy dané funkce. Mají různá předdefinovaná měřítka zobrazení. Pro naše účely vhodný obrázek si můžeme opět stáhnout, tentokrát je v nabídce jednotně formát gif.

Na našem konkrétním grafu (viz Obrázek 24) doslova vidíme výše zmiňované průsečíky s osou x , neboli řešení uvažované kubické rovnice je $x \in \{-2, 1, 3\}$. Potřebný rozklad na součin provede Wolfram Alpha samostatně. Ukazuje jej pod nadpisem *Alternate forms* (viz Obrázek 25).

Alternate forms:

$$y = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$$

$$-x^3 + 2x^2 + 5x + y - 6 = 0$$

Obrázek 25 – Wolfram Alpha, Alternate forms

Pro přesnou tvorbu grafu funkce, resp. ke správnému posouzení jejího průběhu, potřebujeme dále znát její lokální maxima a minima. Z matematického hlediska využijeme znalosti diferenciálního počtu reálné funkce jedné proměnné, především

vlastnosti první a druhé derivace a její vztah k extrémům a inflexním bodům. *Wolfram Alpha* v tomto směru poskytne pouze vyjádření první derivace. Vidíme ji pod nadpisem *Derivative*. Lokální extrémy potom přečteme pod *Local maximum* a *Local minimum* (viz Obrázek 26)

Derivative:

Step-by-step solution

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = 3x^2 - 4x - 5$$

Implicit derivatives:

More

$$\frac{\partial x(y)}{\partial y} = \frac{1}{-5 - 4x + 3x^2}$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = -5 - 4x + 3x^2$$

Local maximum:

Approximate form

$$\max\{y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6\} = \frac{2}{27}(28 + 19\sqrt{19}) \text{ at } x = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}$$

Local minimum:

Exact form

More digits

$$\min\{y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6\} \approx -4.06067 \text{ at } x \approx 2.11963$$

Obrázek 26 – Wolfram Alpha, Derivace, extrémy

V originálním nastavení programu se extrémy zobrazí pod *Exact form* v přesné hodnotě s využitím zlomků a odmocnin. Kliknutím na nabídku *Approximate form* se předvedou jejich přibližná vyjádření. V naší ukázce takto ukazujeme lokální minimum. Kdybychom požadovali větší přesnost, využili bychom dále odkaz *More digits*.

Všímavý uživatel *Wolfram Alpha*, resp. čtenář tohoto textu jistě zpozoroval u některých nabídek (zde konkrétně u první derivace) odkaz *Step-by-step solution*. Jedná se o velmi zajímavý nástroj, jenž předvede jednotlivé kroky výpočtu zobrazovaného výsledku. Tato funkce je však u *Wolfram Alpha* zpoplatněná. V našem textu s ní nepracujeme.



Poznámka

Wolfram Alpha je zajímavý nástroj nejen pro vyšetřování průběhu funkce. Můžeme pomocí něho řešit rovnice, úlohy analytické geometrie, integrálního počtu nebo dalších disciplín. Doporučujeme tyto možnosti samostatně prozkoumat. Jako určitou zajímavost na závěr poznamenejme, že *Wolfram Alpha* dovede odpovídat i na mnohé faktické problémy podané přirozeným jazykem, jež nejsou matematické povahy. Jako námět na další studium programu doporučujeme zadat např. tyto otázky: *When was Vaclav Havel born? How old was George Washington in 1789? Hradec Kralove?* Apod. (Poslední jmenovaná vrátí informace o zadaném městě).

4.4 Matematické výpočty online (MAW)

V předchozí podkapitole jsme narazili na jisté nevýhody programu *Wolfram Alpha*. Jednalo se o nutnost zakoupení přístupu k dalším matematickým funkcím, při vyšetřování průběhu funkce absenci druhé derivace a inflexních bodů a v podstatě nutnost ovládání angličtiny. Poslední jmenovaná dovednost by však v dnešní době spíše neměla být brána jako negativum. Přesto tyto „nedostatky“ lze efektivně překonat kvalitním webovým nástrojem *Matematické výpočty online (NAW)* (<http://um.mendelu.cz/maw-html/menu.php>). Byl vytvořen kolegy z Mendelovy univerzity v Brně, obsahuje zajímavé prostředky pro analýzu funkcí více proměnných, Lagrangeův a Taylorův polynom, metodu nejmenších čtverců, integrální počet nebo řešení diferenciálních rovnic.

V našem textu se budeme věnovat opět vyšetření průběhu funkce. Chce totiž porovnat možnosti tohoto programu s výše prezentovanými funkcemi ostatních on-line nástrojů.

Budeme nyní uvažovat funkci

$$y = \frac{x^3}{x+1}.$$

Stručně k ní poznamenejme, že její definiční obor budou všechna reálná čísla bez -1 a vzhledem k třetí mocnině očekáváme, že obor hodnot bude celé $\mathbb{R}$. Podívejme se, jakým způsobem můžeme její průběh zpracovat v *Matematických výpočtech online (NAW)*.

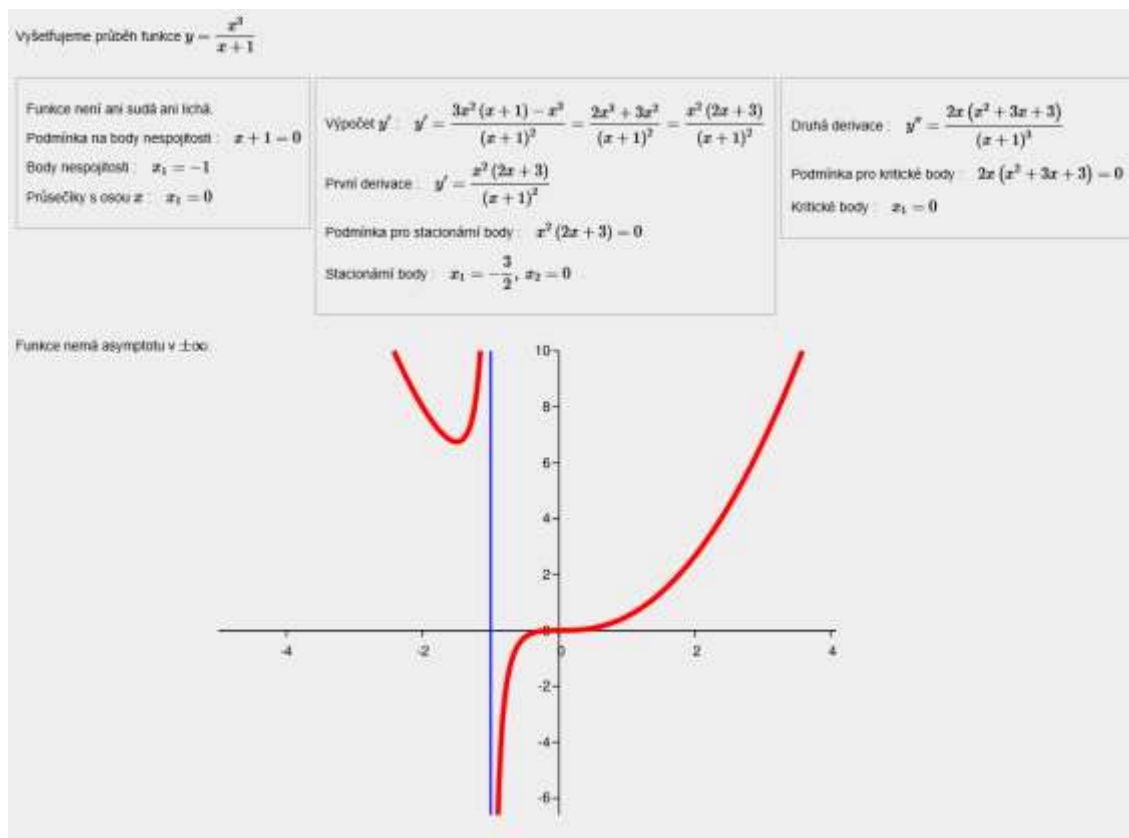
V menu stránky zvolíme odkaz *Průběh funkce* (druhý zleva ve druhé řadě shora). Zobrazí se editovací vstupní pole *Funkce: y =*, do něhož vložíme zadání $x^3/(x+1)$ a klikneme na nabídku odeslat (viz Obrázek 27).

Obrázek 27 – Matematické výpočty online (NAW), vstupní pole

Podobně jako v předchozí situaci potřebujeme k adekvátnímu vyšetření průběhu naší funkce užít diferenciální počet. Jakým způsobem program zpracuje tento úkol, ukazuje následující obrázek (viz Obrázek 28).

Popišme nyní jednotlivá pole obrazovky (screenshot na Obrázku 28 je pro lepší čitelnost oráznutý). V levém horním rohu může nejprve uživatel zkontrolovat zadání své funkce. Pod ním následují základní vlastnosti studované funkce. Nejzajímavější pole

jistě představují výpočty první a druhé derivace. U y' je uveden postup výpočtu v několika krocích, dále podmínka pro stacionární body a jejich samotné hodnoty. Vpravo u y'' jsou zmíněny kritické body. Graf funkce je doplněn o obraz asymptoty bez směrnice $x = -1$ a poznámkou, že jiné asymptoty funkce nemá.



Obrázek 28 – Matematické výpočty online (NAW), vyšetření průběhu funkce



Poznámka

Kladné stránky prostředí průběhu funkce *Matematických výpočtů online (NAW)* jsou bezpochyby přehledné uspořádání prezentovaných výsledků, ukázka některých kroků výpočtu, představení vlastností funkcí a jazyk programu. Na druhou stranu některé závěry jsou svým způsobem neúplně nebo zavádějící. Není například explicitně uveden průsečík s osou y , není rozhodnuto, ve kterém stacionárním bodě se nachází minimum, resp. maximum, případně je-li pro $x = 0$ skutečně inflexní bod. Poněkud překvapivé je rovněž tvrzení, že pro $x = -1$ dostáváme bod nespojitosti. Z matematického hlediska zde obtížně o spojitosti můžeme hovořit, neboť v tomto bodě není funkce definována. Přes tyto výtky však vřele doporučujeme objevovat další možnosti tohoto programu, neboť uvedené nedostatky jsou z faktického hlediska spíše formálního charakteru.



Kontrolní otázky

S jakými on-line dostupnými nástroji jsme se seznámili?

Dovede program *Fooplot* pracovat i s polárními souřadnicemi?

Jakým způsobem je možné měnit v programu *Draw Function Graph* barvu nákresey?

Jaké úkoly lze řešit v prostředí *Wolframalpha*?

Dovede nástroj *Průběh funkce* z webu *Matematické výpočty online (NAW)* explicitně uvést inflexní body?



Souhrn

Celkově vzato jsme v této kapitole pochopitelně nevyčerпали všechny kvalitní on-line výpočetní nástroje. Zmínili jsme čtyři příklady, *Draw Function Graph*, *Fooplot*, *Wolframalpha* a *Matematické výpočty online (NAW)* a ukázali jsme jejich základní funkce. Jedná se o jedny z nejběžněji užívaných prostředí v českém prostoru. Celkově jsme chtěli především poukázat na možnosti kontroly ručně prováděných výpočtů pomocí webových aplikací a tvorbu kvalitních obrázků a možnosti jejich stažení k dalšímu pedagogickému užití.



Literatura a zajímavé odkazy

- ROBOVÁ, J. *Prostředky ICT v přípravě učitelů matematiky*. České Budějovice: University of South Bohemia Department of Mathematics Report Series, 2005.
- *Draw Function Graphs*. Dostupné on-line: <http://rechneronline.de/function-graphs>.
- *Fooplot*. Dostupné on-line: <http://fooplot.com>.
- *Wolfram Alpha*. Dostupné on-line: <http://www.wolframalpha.com>.
- *Matematické výpočty online (NAW)*. Dostupné on-line: <http://um.mendelu.cz/maw-html/menu.php>.

5 Podpora výuky matematiky prostřednictvím webových stránek



Cíle

Po prostudování této kapitoly:

- Seznámíte se s kvalitními učebními texty, jež můžete vhodně užít při výuce matematiky na základní a střední škole a jež jsou dostupné on-line.
- Upozornit na servery *Realisticky.cz* a *Portál středoškolské matematiky*.



Pojmy k zapamatování

- *Realisticky.cz*
- Portál středoškolské matematiky

5.1 *Realisticky.cz*

Portál *Realisticky.cz* (<http://www.realisticky.cz>, Obrázek 29) představuje webovou stránku obsahující učebnice matematiky a fyziky pro střední školy a částečně pro 2. stupeň základní školy, resp. nižší ročníky víceletých gymnázií. Jeho autorem je středoškolský učitel Martin Krynický působící na gymnáziu v Třeboni. Základní poslání portálu lze vhodně shrnout citací z úvodní stránky webu:

Stránky www.realisticky.cz si kladou následující cíle (uspořádány vzestupně podle ambicióznosti):

- *poskytovat zázemí pro veřejné publikování učebnic, které umožňují motivovaným zájemcům samostudium a zájímajícím se učitelům usnadňují přípravu na realistickou výuku,*
- *seznámit veřejnost (zejména učitelkou) se základy a praktickým využitím realistické pedagogiky,*
- *umožnit vzájemnou diskusi uživatelů učebnic (učitelů i studentů) i všech dalších zainteresovaných stran, jak o konkrétních problémech výuky matematiky a fyziky (a doufejme, že časem i dalších předmětů), tak o obecnějších problémech školství vůbec a to bez zákopové války mezi konzervativci a reformisty, která již přes deset let probíhá a ničí české školství,*
- *iniciovat a udržet dialog mezi učiteli o studenty o tom, co se ve školách z pohledu obou stran vlastně děje a přispět tak k lepšímu vzájemnému pochopení,*
- *pokusit se o vybudování platformy, která by umožňovala vzájemnou pomoc při hledání realistického pohledu na okolní svět.*

(viz <http://www.realisticky.cz/clanky.php?id=zaklad>, cit. [2015-02-25])

Celková koncepce zpracování učebních textů vychází s myšlenky tzv. realistické pedagogiky, jejímž hlavním zastáncem a tvůrcem je autor webu. Některé její myšlenky

Www.realisticky.cz

když (se) chcete naučit...

jsou poměrně trefné, s jinými však lze vcelku nesouhlasit. My bychom se však zaměřili na didaktické zpracování učebnic matematiky a jejich využitelnost. Budeme se věnovat středoškolské matematice, neboť zpracování textů matematiky 2. stupně základní školy nebylo v době tvorby tohoto textu ještě úplné.

Obrázek 29 – Realisticky.cz, logo stránky

Základní struktura témat středoškolské matematiky vychází z koncepce série učebnic *Matematika pro gymnázia* vydávané nakladatelstvím Prometheus. Hlavní kapitoly jsou na Realisticky.cz nazvány: *Funkce a rovnice*; *Planimetrie*; *Goniometrie*; *Stereometrie*; *Komplexní čísla*; *Analytická geometrie*; *Posloupnosti*; *Kombinatorika*, *pravděpodobnost, statistika*; *Diferenciální a integrální počet*; *Závěrečné opakování*. V podstatě přesně kopírují učebnice *Matematiky pro gymnázia*. Jediným výraznějším rozdílem je propojení témat rovnice a funkce.

Didaktického zpracování nyní předvedeme na vybrané kapitole, volíme tematický celek Goniometrie.

Goniometrie

Matematika SŠ » Goniometrie »

aktualizováno: 13. 9. 2014 10:52

Seznam kapitol / hodin

- 1 **Vlastnosti funkcí** +
- 2 **Goniometrické funkce** +
- 3 **Goniometrické rovnice a vzorce** +
- 4 **Trigonometrie** +

040401	Sinová věta	Lekce	Příklady
040402	Kosinová věta	Lekce	Příklady
040403	Další trigonometrické věty	Lekce	Příklady
040404	Trigonometrie v praxi	Lekce	Příklady

Obrázek 30 – Realisticky.cz, Goniometrie

Na Obrázku 30 předkládáme screenshot nabídky této kapitoly. Hned nahoře pozorujeme, že jsme v sekci Matematika SŠ a vstoupili jsme do celku Goniometrie. Seznam kapitol se zobrazuje níže. Každá z nich je zpracována do jednotlivých (jedinečně očíslovaných) vyučovacích hodin, jejich přehled můžeme rozbalit klepnutím na symbol +. Takto jsme zobrazili na ukázkou hodiny věnované trigonometrii. Každou z nich můžeme zobrazit buďto jako *Lekce* nebo jako *Příklady*. První jmenovaný odkaz zobrazí celý výklad příslušné látky se všemi příklady vyřešenými. Druhý představí pouze zadání jednotlivých úloh. Nemá smysl do našeho textu vkládat celé znění těchto kapitol. Necht' proto čtenář samostatně texty projde.

Zásadní přínos Realisticky.cz spatřujeme v možnosti dvojího užití jednotlivých částí. Chceme-li pracovat s výkladem látky a postup řešení úloh podpořit učebním textem, volíme *Lekci* daného tématu. Pokud potřebujeme pouze zadání (těch samých) příkladů,

klikneme na odkaz *Příklady*. Další kladnou stránkou tohoto portálu je velmi přívětivé vyjadřování a vysvětlování dané problematiky, jehož lze vhodně využít např. při samostudiu.

Sám autor na úvodní stránce přiznává, *Člověk je tvor omylný* (<http://www.realisticky.cz>, cit. [2015-02-25]). Musíme bohužel čtenáře upozornit na nutnost kontroly textu před jeho pedagogickým použitím. Jednak jde místy o drobné překlepy, jednak zpracování některých částí je z metodického hlediska poněkud kostrbaté nebo dokonce nevhodné. Pro doložení této kritiky nechť čtenář prostuduje řešení příkladu 6 z kapitoly 4.4.1 *Sinová věta*.



Poznámka

Přes uvedené nedostatky lze server Realisticky.cz právem považovat za kvalitní zdroj studijních textů, jež vznikl v našem prostředí v posledních letech. Jeho autor jej přímo využívá v hodinách matematiky jako učebnice. Pro ostatní pedagogy může být zdrojem inspirace, prostředkem oživení vyučovacích hodin, zadávání domácích úkolů a samostudia.

5.2 Portál středoškolské matematiky.

Portál středoškolské matematiky (<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal>) je projekt Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Představuje on-line dostupné studijní materiály k vybraným tematickým celkům matematiky na střední škole. V současné době jsou v něm zahrnuta témata *Funkce, Goniometrické rovnice a nerovnice, Limita a spojitost, Diferenciální počet, Analytická geometrie, Posloupnosti a řady, Kombinatorika a Základy logiky*. V přípravě je však několik dalších celků, které budou v brzké době doplněny. Hlavní myšlenku projektu můžeme opět vystihnout citací z webové stránky O projektu:

Cílem projektu je vytvoření komplexního portálu středoškolské matematiky, který má sloužit jako interaktivní výuková pomůcka pro středoškolské studenty i jejich učitele. Jeho hlavní výhodou má být rozsah učiva a pečlivá příprava materiálů z hlediska věcné správnosti i vhodné didaktické výstavby pod vedením zkušených odborníků.

(viz <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/oprojektu.php>, cit. [2015-02-26])

Podobně jako ze serveru Realisticky.cz lze z Portálu středoškolské matematiky čerpat výklad teorie, řešení příkladů nebo jejich zadání a tím vhodně doplňovat vlastní výuku. Nechť tedy čtenář samostatně prostuduje jeho části. Za nejzajímavější vlastnost webu je však jeho interaktivita. Řada stránek je obohacena pohyblivými applety a některé tematické celky jsou doplněny vhodnými on-line testy.

Jako ukázkou volíme test z kapitoly *Goniometrické rovnice a nerovnice*. Jeho první úloha (viz Obrázek 31) představuje základní příklad na práci s goniometrickými funkcemi. Zadáním je určit hodnotu příslušné funkce pro konkrétní x . Pokud zvolíme (klikem na požadované kolečko) správnou hodnotu, ihned se zobrazí modrá „fajfka“ jako symbol dobré odpovědi. Chybné řešení potom vede k červenému křížku.

Obecně řadu úloh testů můžeme vyřešit z hlavy, ke složitějším budeme pravděpodobně potřebovat pár poznámek bokem na papír.

Titulní strana		Goniometrické funkce									
Úvod	↓	Úloha 1									
Teória	↓	Prirad' správnú funkčnú hodnotu:									
Základné rovnice	↓		A	B	C	D	E	F	G	H	
Zložitejšie rovnice	↓		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	
Základné nerovnice	↓	a) $\sin \frac{\pi}{6}$	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☒
Zložitejšie nerovnice	↓	b) $\cos \frac{\pi}{4}$	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Testy	↓	c) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☒
Úvod		d) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3}$	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Goniometrické funkcie		e) $\sin \frac{3\pi}{2}$	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Cyklometrické funkcie		f) $\cos \frac{\pi}{6}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
Hyperbolické funkcie		g) $\operatorname{tg} \pi$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
Hyperbolometrické funkcie		h) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
		Znova									

Obrázek 31 – Portál středoškolské matematiky, test



Poznámka

Jednou z nevýhod *Portálu středoškolské matematiky* je jeho prozatímní neúplnost. Přesto jej však můžeme považovat za jeden z nejkvalitnějších tuzemských webů určených k podpoře výuky matematiky. Oproti *Realisticky.cz* za jeho tvorbou stojí širší kolektiv odborníků garantujících jeho věcnou a metodickou správnost.



Kontrolní otázky

S jakými webovými servery určené k podpoře výuky matematiky jsme se seznámili?

Obsahuje server *Realisticky.cz* prvky interaktivity?

S jakými animacemi se můžeme setkat na *Portálu středoškolské matematiky*?

Který z tematických celků absentuje na *Portálu středoškolské matematiky*?

Všimli jste si při studiu prezentovaných stránek nějakých jejich chyb?



Souhrn

Webových stránek určených k podpoře výuky matematiky existuje v naší republice i ve světě nepřeberné množství. Bohužel musíme konstatovat, že řada z nich postrádá věcnou správnost nebo jsou z jiných důvodů nepoužitelné. Jejich soupis jsme však nechtěli uvádět, neboť to nevnímáme jako příliš přínosné. Zaměřili jsme se proto pouze na dva, *Realisticky.cz* a *Portál středoškolské matematiky*, jež pokládáme za nejlépe zpracované.



Literatura a zajímavé odkazy

- ROBOVÁ, J. *Webové stránky a výuka matematiky*. In DOSTÁL, J. (ed.), *Infotech* [CD ROM]. Olomouc: Votobia, 2007.
- *Realisticky.cz*. Dostupné on-line:
<http://www.realisticky.cz>.
- *Portál středoškolské matematiky*. Dostupné on-line:
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal>.
- *Studentské práce KDM MFF UK v Praze*. Dostupné on-line:
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky>.



6 Propojování geometrie a algebry střední školy pomocí dynamických softwarů



Cíle

Po prostudování této kapitoly:

- Získáte přehled softwarech dynamické geometrie.
- Seznámíte se s principem práce v těchto prostředích.



Pojmy k zapamatování

- Cabri Geometry
- Archimedes Geo3D
- Dynamická geometrie
- GeoGebra

6.1 Dynamická geometrie

Obecně můžeme tvrdit, že programy dynamické geometrie představuje určitý fenomén posledních let, jenž byl podpořen a umožněn rozšířením výpočetní techniky nejen do školního prostředí. Původně byly geometrické počítačové programy určitou náhražkou za rýsování tužkou, jež přinesla zpřesnění a mnohdy také zrychlení práce.

Postupně však byla v programech ovládnuta technika proměňování narýsovaného obrazce pomocí změny polohy tzv. volných objektů, přičemž zbytek celé konstrukce se následně automaticky překreslí. Další dobrý výstup, resp. důsledek rýsování v počítači, představuje přímé propojení syntetické a analytické geometrie. Jak následně ukážeme na příkladu, synteticky sestavené geometrické objekty můžeme ihned „vidět“ pomocí jejich vyjádření prostředky analytické geometrie (a naopak).

6.1.1 Programy dynamické geometrie

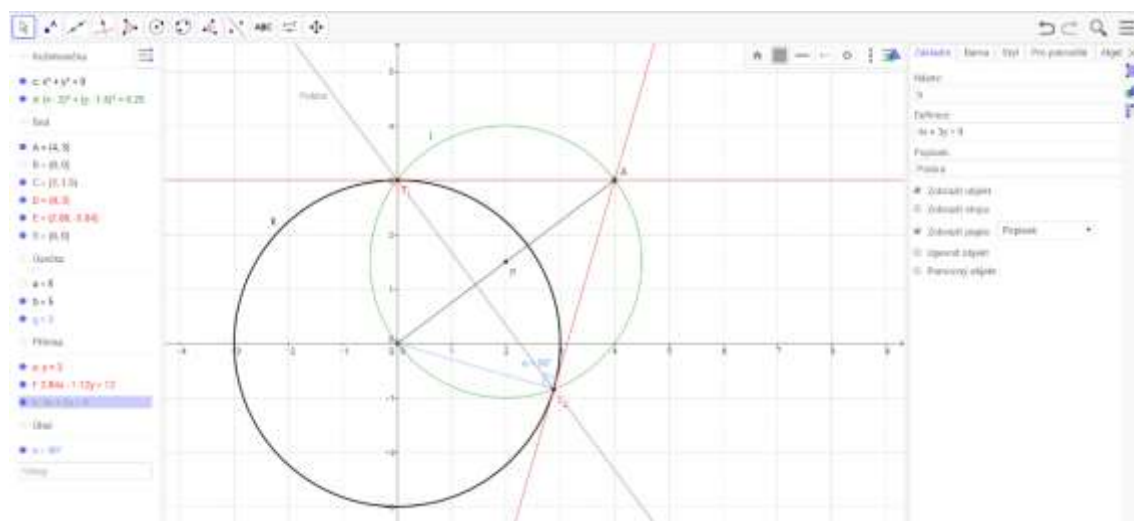
Jmenujme nyní konkrétní programy dynamické geometrie s jejich stručnou anotací.

- *Cabri Geometry* – kvalitní a poměrně rozšířený software, příjemné uživatelské prostředí, zdarma ke stažení pouze demoverze s nemožností ukládat rysy, také ve 3D verzi
- *Archimedes Geo3D* – software určený k práci v prostorové geometrii, více funkcí proti 3D verzi *Cabri Geometry*, distribuován jako shareware (třeba zaplatit pro dlouhodobé užívání).
- *Dynamická geometrie* – jednoduchý český software dynamické geometrie, placená plnohodnotná verze, možnost stažení trialu
- *GeoGebra* – mnoha cenami ohodnocený rozšířený software, vyvíjen na celosvětové úrovni, zdarma dostupný ve většině svých plnohodnotných verzích, dostupný také on-line bez nutnosti instalace, aktuálně je v provozu zkušební verze 3D

6.2 Ukázka principu

Princip práce s programem dynamické geometrie ukážeme na softwaru *GeoGebra* na konkrétní úloze. Z hlediska planimetrie se bude jednat o „legendární úlohu“ učiva 2. stupně základní školy, z hlediska analytické geometrie běžný příklad středoškolské matematiky. Zadání zní: Ke kružnici $k(S, 3 \text{ cm})$ sestrojte tečny z bodu A , kde $|AS| = 5 \text{ cm}$. Vzhledem k tomu, že chceme demonstrovat zmiňované *propojování* z názvu této kapitoly, zasadíme danou situaci co nejjednodušeji do souřadného systému. Volíme prostě $S[0, 0]$ a $A[4, 3]$. Ze souřadnic bodu A vidíme, že dané $|AS| = 5 \text{ cm}$ platí, narážíme tím na „základní“ pythagorejský trojúhelník „3, 4, 5“.

Stěžejním problémem úlohy je bezpochyby určení bodů dotyku hledaných tečen. Z planimetrického hlediska se nacházejí na průsečíku k a Thaletovy kružnice sestrojené nad úsečkou AS .



Obrázek 32 – GeoGebra, tečny kružnice z vnějšího bodu

Na Obrázku 32 ukazujeme hotovou konstrukci úlohy zhotovenou v on-line verzi programu GeoGebra. Samotný postup je poměrně jednoduchý. Černá kružnice k a bod A jsou dány. Nalezneme bod P , střed úsečky AS . Sestrojíme Thaletovu kružnici (označili jsme ji l , zeleně). Pro hledané body dotyku platí $T_1, T_2 \in k \cap l$. Tečny jsme na závěr vyznačili červeně.

Při analytickém řešení zpravidla hledáme rovnici tzv. poláry dané kružnice. Jedná se o přímku procházející body dotyku T_1, T_2 , obecně má tvar související s předpisem tečny ke kružnici. V našem případě je dána rovnicí $4x + 3y = 9$.

Rozeberme nyní zpracování problému v programu *GeoGebra* z metodického hlediska. Na levé straně máme možnost zobrazit tzv. algebraické okno. Vidíme na něm analytická vyjádření sestrojených objektů a pomocí spodního pole *Vstup* rovněž můžeme analyticky jednotlivé objekty zadávat. Jejich pojmenování činí program automaticky, máme však možnost jim přiřazovat jaké názvy potřebujeme. Za „nejzajímavější“ považujeme body dotyku T_1, T_2 , resp. D, E . Pokud úlohu řešíme „ručně“ na papíře, pravděpodobně (podle školských „početních zvyklostí“) dojdeme k vyjádření $T_1[0, 3]$, $T_2\left[\frac{72}{25}, -\frac{63}{25}\right]$. Vidíme, že *GeoGebra* ukáže hodnoty desetinným číslem, což jistě není nic proti ničemu. Nicméně pokud sestavujeme rovnice tečen,

obdržíme u druhé z nich (procházející bodem T_2) poměrně elegantní vyjádření $24x - 7y - 75 = 0$. Takové však program neukáže. Z matematického hlediska se však nejedná o chybu.

S nárysem můžeme dále pracovat. Například můžeme zobrazit pravý úhel mezi poloměrem a tečnou kružnice nebo některými body pohybovat pro změnu rozvržení rysu.



Poznámka

Použití dynamické geometrie ve vyučování může být velmi zajímavým prvkem oživení, podpory objevování a tvoření v matematice. Na druhou stranu musíme přiznat, že nemusí znamenat vždy plus pro pedagogickou práci, resp. že nemůže, ba ani nesmí, plně nahradit rýsování tužkou a algebraické výpočty v analytické geometrii.



Kontrolní otázky

Které znáte programy dynamické geometrie a na které bylo v tomto textu upozorněno?

Je program *GeoGebra* připravován i pro práci v trojrozměrném prostoru?

Zobrazí vždy *GeoGebra* rovnice jednotlivých objektů vždy s celočíselnými koeficienty (pokud je to matematicky možné)?

Preferuje *GeoGebra* používání zlomků před desetinnými čísly?



Souhrn

Objevování souvislostí mezi jednotlivými oblastmi matematiky pomocí dynamické geometrie je v současné době velice dostupné. Domníváme se, že by se učitelé měli s těmito prostředky seznámit a nechat se jimi inspirovat. Samotné použití ve výuce však vyžaduje cit, pedagogický takt a není svým způsobem „samospasitelná“.



Literatura a zajímavé odkazy

- GERGELITSOVÁ, Š. *Průvodce Geogebrou*. Praha: Generation Europe, 2011.
- ROBOVÁ, J., VONDROVÁ, N., *Future mathematics teachers and the identification of specific skills for work with GeoGebra*. In HOUŠKA, M. a kol. (eds.), *Proceedings of 11th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2014*, pp. 640–647. Praha: Czech University of Life Sciences, 2014.
- *Cabri Geometry*. Dostupné on-line: <http://www.pf.jcu.cz/cabri>.
- *Dvacítka řešených úloh v programu GeoGebra*. Dostupné on-line: http://www.gymkrom.cz/web/ict/materialy/Dvacitka_GGB.pdf.
- *Cabri Geometry, český výukový portál*. Dostupné on-line: <http://www.cabri.com>.
- *Archimedes Geo3D*. Dostupné on-line: <http://raumgeometrie.de/drupal>.
- *Dynamická geometrie*. Dostupné on-line:

- <http://www.instaluj.cz/dynamicka-geometrie>.
- GeoGebra. Dostupné on-line:
<http://www.geogebra.org>.



7 Funkce na druhém stupni základní školy a na střední škole v programu GeoGebra



Cíle

Po prostudování této kapitoly:

- Zjistíte možnosti animace v programu GeoGebra.
- Budete seznámeni s významem koeficientů kvadratické funkce k vrcholu jejího grafu.



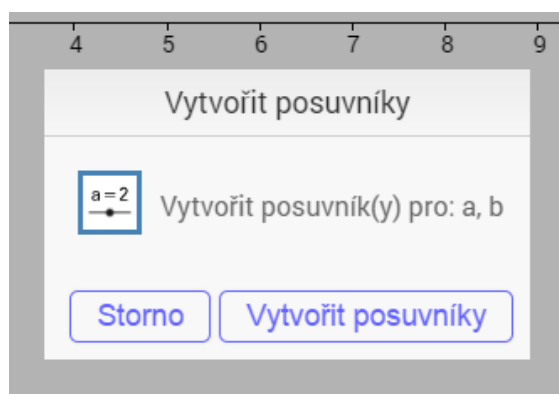
Pojmy k zapamatování

- Koeficienty předpisu lineární funkce
- Koeficienty předpisu kvadratické funkce

7.1 Význam koeficientů předpisu lineární funkce

Výuka funkcí se na základní škole probíhá zpravidla v 9. ročníku a realizuje se většinou v rozsahu lineární funkce ve tvaru $y = ax + b$, kvadratické funkce ve zjednodušené podobě $y = a(x - m)^2 + n$ a lineární lomené funkce $y = \frac{k}{x}$ (jednotlivé koeficienty jsou prvky příslušných množin).

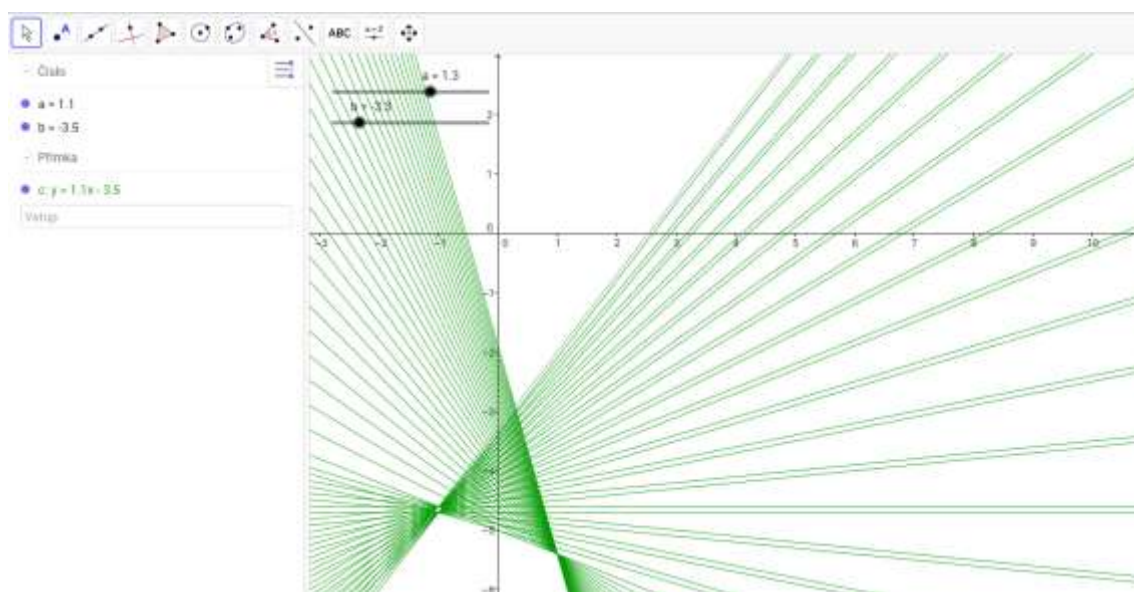
V následujícím bychom se zaměřili na význam koeficientů lineární funkce. Popsali bychom konstrukci modelu v programu *GeoGebra*, pomocí něhož můžeme podpořit výuku tohoto problému. Budeme pracovat ve webovém prostředí *GeoGebry*, v bodech nyní podrobněji popíšeme jednotlivé kroky:



- Spustíme program z webu <http://www.geogebra.org>. Klikneme na nabídku *Začněte tvořit* a následně na *Algebra*. Zobrazí se náčrtná a algebraická okna.
Obrázek 33 – Lineární funkce, posuvníky
- Do vstupního pole zadáme vyjádření $y = ax + b$. Program se „zeptá“, zdali si přejeme vytvořit tzv. posuvníky. Nabídku přijmeme (viz Obrázek 33).
- Vytvoří se lineární funkce $y = x + 1$.

V následujícím chceme prezentovat změnu grafu funkce v souvislosti s proměnou hodnoty a a b . Pokud zvolíme nástroj ukazovátko, můžeme efektivně posuvníky hýbat. Graf se bude automaticky naklánět, pokud proměňujeme a a posunovat, pokud proměňujeme b . Pokud chceme lépe ilustrovat tyto změny v pohybu, můžeme dále postupovat takto:

- Pro zvýraznění grafu jej můžeme zbarvit podle libosti (v ukázce na Obrázku 34 volíme zelenou). Změnu barvy provedeme ve vlastnostech objektu (pokliknutím pravým tlačítkem na předpis nebo graf).
- Kliknutím pravým tlačítkem na předpis funkce zapneme tzv. stopu objektu.
- Opět kliknutím pravým tlačítkem tentokrát na některý posuvník zapneme animaci. Výsledek předvádíme na Obrázku 34.



Obrázek 34 – Lineární funkce, animace

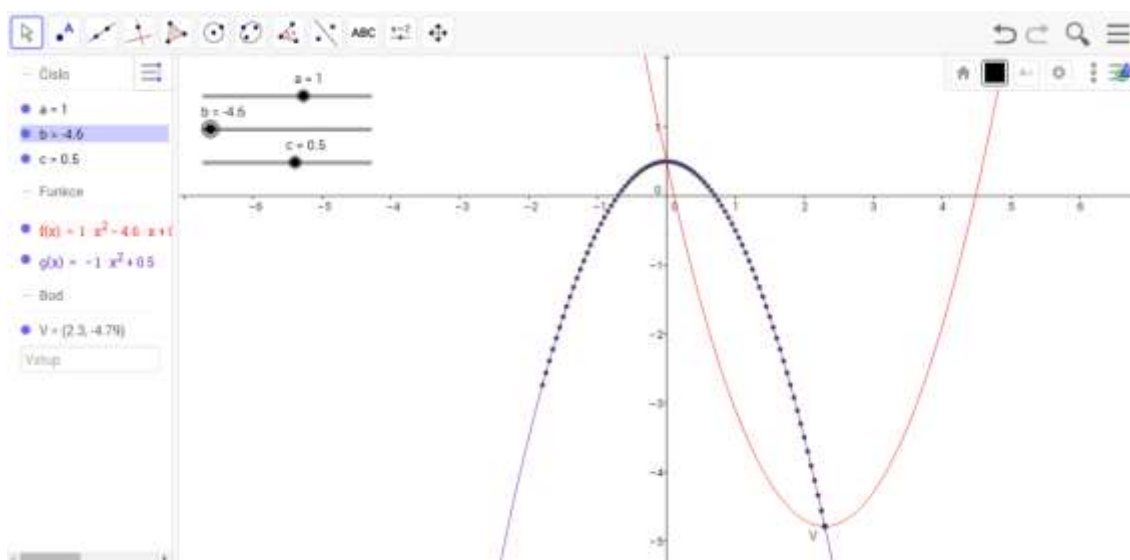
Poznamenejme, že volba animace vyžaduje určitý cit. V naší ukázce jsme nechali proměňovat oba koeficienty současně. Doporučujeme předvádět spíše každý zvlášť.

7.2 Význam koeficientů předpisu kvadratické funkce

Jako ochutnávku dalších možností animace funkcí v programu *GeoGebra* a rovněž dalších možností práce s kvadratickou funkcí na střední škole nyní stručně rozeberme význam koeficientů předpisu kvadratické funkce ve známém tvaru $y = ax^2 + bx + c$. Uvažujeme následující úlohu: Po jaké křivce se pohybuje vrchol paraboly, grafu funkce, pokud proměňujeme postupně koeficienty a, b, c ?

Z matematického hlediska je třeba nejprve promyslet souřadnice jmenovaného vrcholu. Postupovat můžeme např. přes úpravu na čtverec, vyjde nám $V\left[\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2-4ac}{4a}\right]$. Tyto souřadnice můžeme rovněž vnímat jako parametrické rovnice hledaných útvarů: $x = \frac{-b}{2a}, y = \frac{-b^2-4ac}{4a}$. Převodem na obecné rovnice získáme tato vyjádření: Při změně hodnoty koeficientu a se vrchol pohybuje po přímce $y = \frac{bx}{2} + c$, při proměňování b po parabole $y = -ax^2 + c$ a při změně c po kolmici na osu x o rovnici $x = \frac{-b}{2a}$.

Vřele čtenáři doporučujeme projít jednotlivé výpočty. Jedná se o zajímavou práci na pomezí úpravy algebraických výrazů, rovnic, funkcí a analytické geometrie. Pokud vše analogicky předchozí podkapitole vložíme do *GeoGebry* (opět s vytvořením posuvníků pro a, b, c), dostaneme poutavý dynamický model. Na Obrázku 35 ukazujeme animaci změny koeficientu b . Vrchol V zde zanechává svoji stopu na příslušné fialové parabole označené $g(x)$.



Obrázek 35 – Kvadratická funkce, animace změny koeficientu b



Poznámka

Analogicky modelu lineární funkce i zde je třeba citlivě pracovat s animacemi, případně se zobrazením stop objektu. Na Obrázku 35 je např. zapnuta stopa vrcholu V , ale vypnuta stopa pohybující se paraboly $f(x)$.



Kontrolní otázky

Umožňuje program GeoGebra automaticky tvořit tzv. posuvníky?

Jakým způsobem zapneme stopu objektu?

Jak spustíme animaci modelu?

Jak se bude měnit graf kvadratické funkce při změně hodnoty koeficientů z jejího předpisu?

Navrhněte a sestrojte dynamické modely goniometrických a exponenciálních funkcí a lo-garitmů.



Souhrn

Možnosti využití *GeoGebry* pro tvorbu dynamických modelů k výuce funkcí jsou obecně velmi široké. Díky rozsahu tohoto textu jsme ukázali pouze dva příklady,

animaci jedné základní úlohy o lineární funkci na základní škole a upoutávku na zajímavý problém o kvadratické funkci na střední škole.



Literatura a zajímavé odkazy

- GERGELITSOVÁ, Š. *Průvodce Geogebrou*. Praha: Generation Europe, 2011.
- ROBOVÁ, J., VONDROVÁ, N., *Future mathematics teachers and the identification of specific skills for work with GeoGebra*. In HOUŠKA, M. a kol. (eds.), *Proceedings of 11th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2014*, pp. 640–647. Praha: Czech University of Life Sciences Prague, 2014.
- *Dvacítka řešených úloh v programu GeoGebra*. Dostupné on-line: http://www.gymkrom.cz/web/ict/materialy/Dvacitka_GGB.pdf.
- *GeoGebra*. Dostupné on-line: <http://www.geogebra.org>.

8 Banka otázek

- 1) Analýza a priori se provádí
 - a) na konci hodiny
 - b) uprostřed hodiny
 - c) o přestávce
 - d) před realizací hodiny
- 2) Podnětné vyučování vyrůstá
 - a) z konstruktivismu
 - b) z instruktivismu
 - c) z transmisivního vyučování
 - d) z projektové výuky
- 3) DUM je
 - a) domácí úkol z matematiky
 - b) digitální učební materiál
 - c) stavba z krychlí
 - d) půdorys stavby z krychlí
- 4) Po realizaci odučené hodiny se provádí
 - a) analýza a priori
 - b) analýza a posteriori
 - c) syntéza a priori
 - d) schema a posteriori
- 5) Fenomén Lesson Study pochází
 - a) z Velké Británie
 - b) z Číny
 - c) z USA
 - d) z Japonska
- 6) Pro podnětné vyučování je důležitá
 - a) reprodukce
 - b) kázeň
 - c) motivace
 - d) transmise
- 7) Podnětná prostředí jsou založena na
 - a) domácí přípravě
 - b) problémové práci s úlohou
 - c) porozumění textu
 - d) dodržení dílčích kroků řešení
- 8) Aplety knihovny NLVM
 - a) se týkají pouze geometrie
 - b) nejsou určeny pro středoškolskou matematiku
 - c) jsou zaměřeny pouze na matematiku primární školy
 - d) se týkají také algebry.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 9) Prostředí podle Hejného metody
- a) jsou určena pouze pro druhý stupeň základní školy
 - b) jsou použitelná od primární školy po střední
 - c) jsou určena pouze pro primární školu
 - d) nelze využít pro středoškolskou matematiku
- 10) Učitel nesmí
- a) nechat žáka udělat chybu
 - b) nechat žáka řešit obtížnou úlohu samostatně
 - c) žákovi ihned prozradit postup řešení
 - d) žákům zadávat problémové úlohy
- 11) Nejnáročnější jsou
- a) cvičení
 - b) problémové úlohy
 - c) aplikační úlohy
 - d) dosazování do vzorce
- 12) Žák, který se opakovaně dopouští stejné chyby
- a) se neučí
 - b) je málo pečlivý
 - c) nemá vytvořenou správnou představu
 - d) se málo snaží
- 13) Výpočetní technika má
- a) zjednodušit vyučování proces
 - b) urychlit vyučování
 - c) zpřehlednit vyučování
 - d) přispět k utváření správných matematických představ
- 14) Výpočetní technika ve vyučování matematiky má
- a) podporovat získávání zkušeností aktivní činností žáka
 - b) nezdržovat výuku
 - c) zrychlit práci učitele
 - d) podpořit výklad učitele názornými příklady
- 15) Lesson Study je založeno na
- a) práci s výpočetní technikou
 - b) kolektivní reflexi
 - c) e-learningu
 - d) dalším studiu v kurzech pro učitele
- 16) Program *Draw Function Graphs* je vhodný pro
- a) řešení úloh variačního počtu
 - b) tvorbu grafu funkce
 - c) nalezení předpisu funkce zadáním tvaru grafu
 - d) řešení úloh integrálního počtu
- 17) Webové prostředí *Fooplot* dovede
- a) rozhodnout, zdali je funkce konvexní nebo konkávní

- b) nalézt předpis funkce zadáním tvaru grafu
 - c) zadávat předpisy funkce hlasem
 - d) kreslit křivky dané parametricky
- 18) Webové prostředí *Fooplot* neumožňuje
- a) zvýraznit lokální extrémy funkcí
 - b) zadávat křivky polárními souřadnicemi
 - c) zobrazovat body o daných souřadnicích
 - d) měnit barvu grafu funkce
- 19) Wolfram Alpha
- a) je první izotop prvku wolfram
 - b) je odpovídající program založený na softwaru Mathematica
 - c) nedovede zjistit, jak starý byl Joe Strummer, když zemřel
 - d) umožňuje zadávat otázky hlasem
- 20) Webový portál *Matematické výpočty online (NAW)* je navržen pro
- a) odpovídání dané otázky z fyziky
 - b) určení Lagrangeova polynomu
 - c) nalezení inflexních bodů funkce jedné proměnné
 - d) určení lokálních extrémů funkce jedné proměnné
- 21) *Realisticky.cz*
- a) je portál, jehož tvůrcem je širší kolektiv autorů
 - b) obsahuje všechna témata matematiky 2. stupně ZŠ
 - c) obsahuje prvky interaktivity
 - d) obsahuje látku středoškolské matematiky
- 22) Interaktivní testové úlohy nalezneme na serverech
- a) *Realisticky.cz*
 - b) *Portál matematiky 2. stupně ZŠ*
 - c) *Portál středoškolské matematiky*
 - d) *Wolfram Alpha*
- 23) *Portál středoškolské matematiky*
- a) tvoří jako jeden autor pedagog jihočeského gymnázia
 - b) obsahuje látku středoškolské analytické geometrie
 - c) obsahuje všechna témata matematiky na střední škole
 - d) vytváří kolektiv akademických pracovníků KDM MFF UK v Praze
- 24) Je pravda, že
- a) *Wolfram Alpha* obsahuje vhodné testové úlohy
 - b) server *Realisticky.cz* neprezentuje subjektivní názory jeho autora
 - c) tematické celky *Realisticky.cz* přesně kopírují učebnice *Matematiky pro gymnázia*
 - d) části *Portálu středoškolské matematiky* vznikly díky diplomovým pracím
- 25) Mezi programy dynamické geometrie nepatří
- a) *GeoGebra*
 - b) *AutoCAD*

- c) *Cabri Geometry*
d) *Archimedes Geo3D*
- 26) Vyberte správné tvrzení
- GeoGebra* nedovede zobrazovat úlohy integrálního počtu
 - GeoGebra* automaticky vyjadřuje koeficienty ve zlomcích
 - GeoGebra* dovede propojit syntetickou geometrii a funkce
 - GeoGebra* nedovede pracovat ve 3D
- 27) Není pravda, že *GeoGebra*
- dovede animovat i více posuvníků najednou
 - není vhodná k zobrazení funkcí odvozených od logaritmů
 - nedovede automaticky upozorňovat na aplikační úlohy z fyziky
 - umožňuje zadat přímku parametrickými rovnicemi
- 28) Koeficient b předpisu kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$
- má vliv na sevření či roztažení grafu funkce
 - nemá vliv na polohu vrcholu grafu funkce
 - nesouvisí při své změně s průsečíkem grafu funkce s osou y
 - nemůže nabýt 0
- 29) V předpisu funkce $y = ax + b$
- nemůže být a rovno 0
 - je b hodnota průsečíku s osou x
 - není b hodnota průsečíku s osou y
 - představuje a tangens úhlu
- 30) Vyberte nesprávné tvrzení
- učitel matematiky má povinnost studovat programy dynamické geometrie
 - GeoGebra* je dostupná v české verzi
 - programy dynamické geometrie mohou zefektivnit výuku matematiky
 - Cabri Geometry* je freewarový program