FUNKCE
Popis pracovních listů a správné výsledky
Cílová skupina: žáci 1. a 2. ročníku SŠ

Označení modifikací:
Pracovní listy jsou rozděleny do tří modifikací: A, B a C.
Modifikace A je určena studentům se specifickými vzdělávacími potřebami, modifikace B je určena pro studenty intaktní/průměrné a skupina C pro studenty nadané.

Cílová skupina:
Cílová skupina jsou žáci 1. a 2. ročníku gymnázií a středních škol s maturitou. Pracovní listy lze použít i u středních odborných učilišť bez maturity, avšak časová náročnost bude pravděpodobně delší.

Zařazení pracovních listů do výuky:
Pracovní listy jsou nastaveny pro ověření výstupních (nikoliv vstupních) znalostí žáků z tematického okruhu Funkce na střední škole. Minimální potřebné znalosti jsou: základní pojmy – definiční obor, obor hodnot, vlastnosti funkcí – rostoucí/klesající, extrémy, parita funkce, periodická funkce, pojem prosté funkce, inverzní funkce, popis funkcí lineárních, kvadratických, případně mocninných a popis funkcí racionálně lomených.
Pracovní listy nevyžadují znalosti exponenciálních a logaritmických funkcí a znalosti goniometrických funkcí.

Časová náročnost:
Časová náročnost se může dle školy lišit, primárně je pracovní list nastaven na jednu vyučovací hodinu v délce 45 minut.

ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

modifikace A, B, C – příklad 1:
První příklad je zaměřený pouze na správné pochopení pojmu funkce $y = f(x)$ – tedy, že jedné neznámé x nemůže být přiřazeno více než jedna hodnota y. Zadání ve všech třech modifikacích je téměř stejné, pouze u modifikace A jsou tabulkové hodnoty upraveny na racionální čísla, aby pro žáka slabšího nebyly iracionální hodnoty matoucí. Rovněž poslední graf (absolutní hodnoty) je v této modifikaci nahrazen nejběžnější, lineární funkcí.

modifikace A:
Víme, že funkce může být určena různými způsoby – funkčním předpisem (analyticky), grafem, tabulkou, nebo slovním popisem závislosti dvou veličin. Z následujících situací vyberte ty, které skutečně určují funkci.

1. $g : y = -3x + \frac{2x+1}{2}$ **ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI**

2.

t	0	2	4	10	14	10	8	16	18
F(t)	0	-6.2	7.5	17.5	-12.8	10.5	-5.6	17.2	-11.1

NE, NEJEDNÁ SE O FUNKCI. HODNOTĚ 10 **JSOU TOTIŽ PŘIŘAZENY DVĚ RŮZNÉ HODNOTY, COŽ U FUNKCE NESMÍ BÝT**

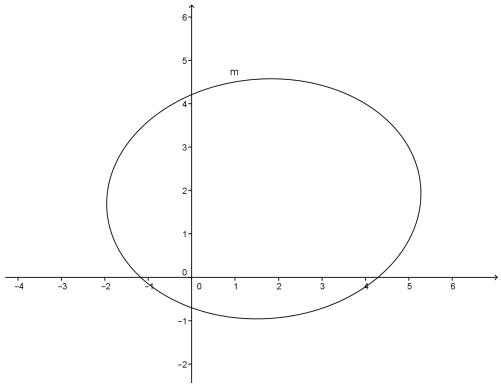
3.

x	-1	0	1	2	3	7
h(x)	-3.5	2.5	0	6.3	0	0

ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI, stejné hodnoty y být mohou.

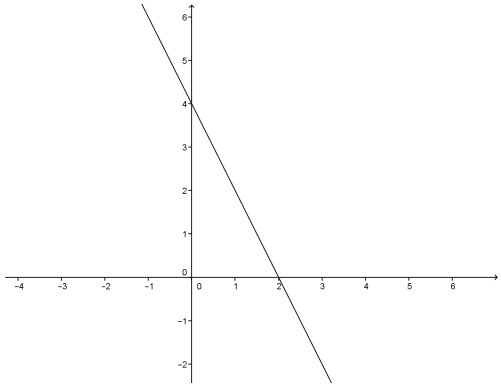
4. $k(x) = x \cdot e^x$ **ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI**

5.



NE, NEJEDNÁ SE O FUNKCI. NA GRAFU VIDÍME, ŽE HODNOTÁM x JSOU PŘIŘAZENY DVĚ RŮZNÉ HODNOTY, COŽ U FUNKCE NESMÍ BÝT – TO TAKÉ POZNÁME PODLE TOHO, ŽE PŘÍMKY ROVNOBĚŽNÉ S OSOU y NESMÍ GRAF PROTNOUT VE VÍCE NEŽ JEDNOM BODĚ, COŽ V TOMTO PŘÍPADĚ SPLNĚNO NENÍ – PROTÍNAJÍ JE VE DVOU BODECH.

6.



ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI

modifikace B, C:
Víme, že funkce může být určena různými způsoby – funkčním předpisem (analyticky), grafem, tabulkou, nebo slovním popisem závislosti dvou veličin. Z následujících situací vyberte ty, které skutečně určují funkci.

1. $g : y = -3x + \frac{2x+1}{2}$ **ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI**

2.

t	0	30	45	$\sqrt{2}$	90	120	135	150	180
F(t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{\pi}$	17.5	-125.8	$\frac{2\pi}{3}$	e^2	$\frac{5\pi}{6}$	11

ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI

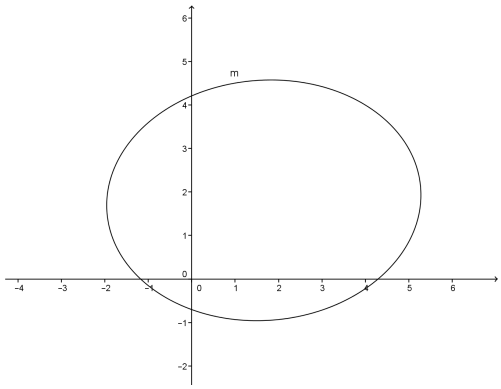
3.

x	-1	0	1	-2	1	2
h(x)	-3.5	0	7.1	6.3	-1.2	2.8

NE, NEJEDNÁ SE O FUNKCI. HODNOTĚ 1 JSOU TOTIŽ PŘIŘAZENY DVĚ RŮZNÉ HODNOTY, COŽ U FUNKCE NESMÍ BÝT

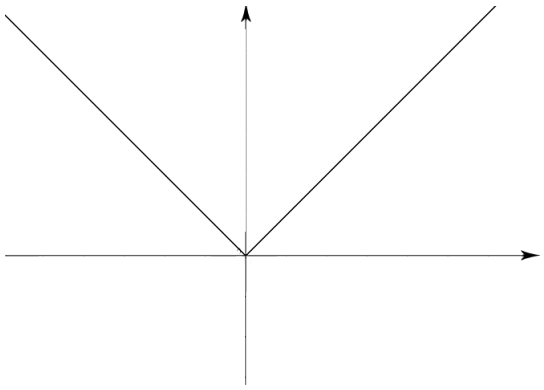
4. $k(x) = x \cdot e^x$

5.



NE, NEJEDNÁ SE O FUNKCI. NA GRAFU VIDÍME, ŽE HODNOTÁM x JSOU PŘIŘAZENY DVĚ RŮZNÉ HODNOTY, COŽ U FUNKCE NESMÍ BÝT – TO TAKÉ POZNÁME PODLE TOHO, ŽE PŘÍMKY ROVNOBĚŽNÉ S OSOU y NESMÍ GRAF PROTNOUT VE VÍCE NEŽ JEDNOM BODĚ, COŽ V TOMTO PŘÍPADĚ SPLNĚNO NENÍ - PROTÍNAJÍ JE VE DVOU BODECH.

6.

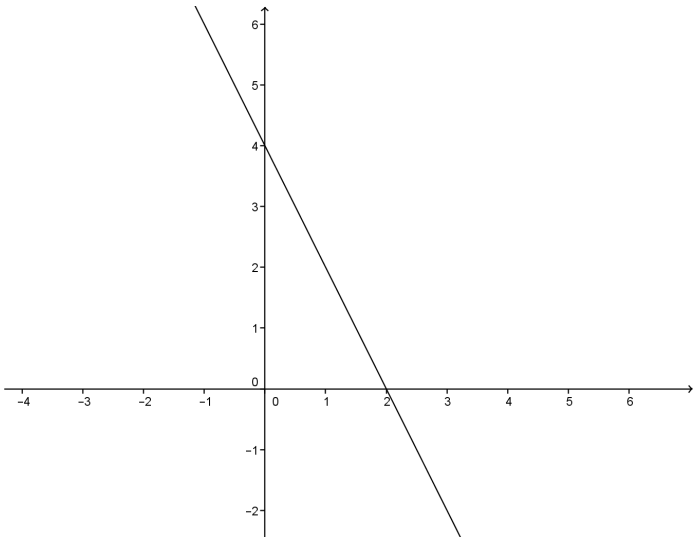


ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI

modifikace A, B, C – příklad 2:
Druhý příklad ověřuje správné pochopení názvů funkcí a jejich grafů. Opět jsou modifikace podobné, u modifikace A jsou uvedeny grafy funkcí zpravidla v základním tvaru, které by měly pro žáka být nejlépe zafixované. Je pravděpodobné, že žák intaktní a nadaný kromě jednoslovné odpovědi popíše danou funkci dalšími vlastnostmi (že je klesající na celém definiční oboru, že má maximum/minimum, atd.) a možná se také pokusí o vytvoření funkčního předpisu. Ovšem není to u příkladu nutno uvádět.

modifikace A:
Níže jsou funkce zadány grafem. Pokuste se je pojmenovat (o jaký typ funkce se jedná) a pojmenujte graf daných funkcí.

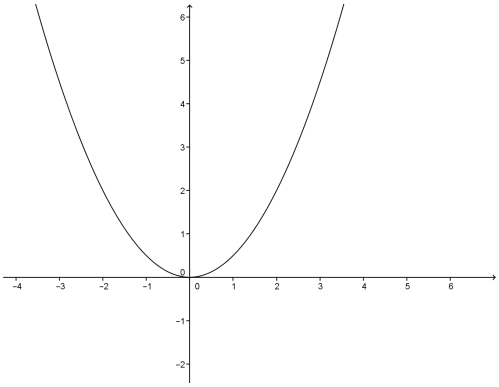
1.



Jedná se o funkci: **LINEÁRNÍ**

Grafem je: **PŘÍMKA**

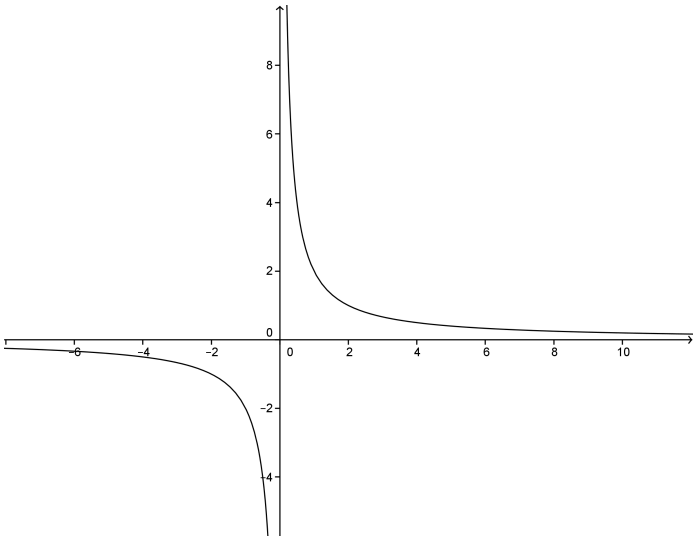
2.



Jedná se o funkci: **KVADRATICKOU**

Grafem je: **PARABOLA**

3.

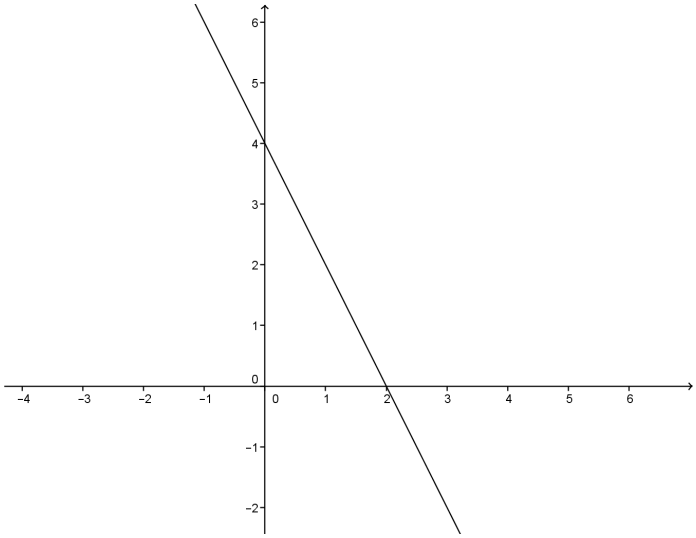


Jedná se o funkci: **RACIONÁLNĚ LOMENOU/NEPŘÍMOU ÚMĚRU**

Grafem je: **HYPERBOLA**

modifikace B, C:
Níže jsou zadány funkce grafem. Pokuste se je pojmenovat (o jaký typ funkce se jedná) a pojmenujte graf daných funkcí.

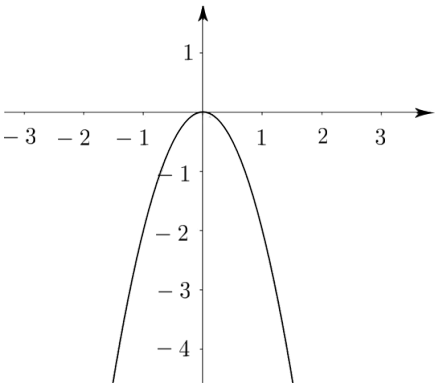
1.



Jedná se o funkci: **LINEÁRNÍ**

Grafem je: **PŘÍMKA**

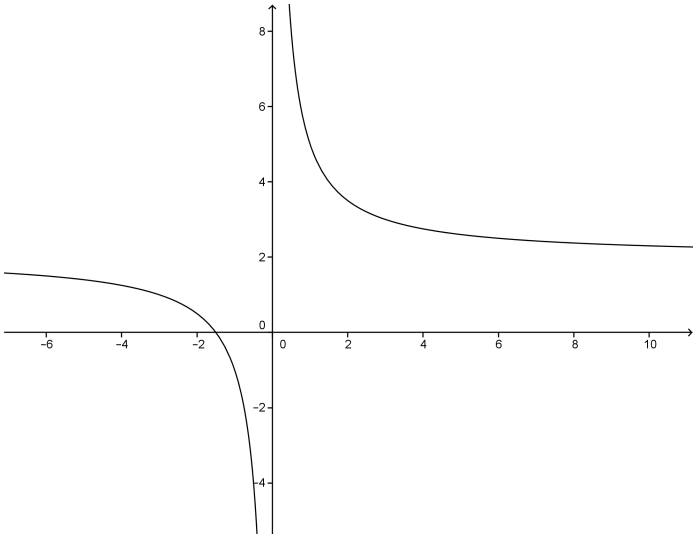
2.



Jedná se o funkci: **KVADRATICKOU**

Grafem je: **PARABOLA**

3.

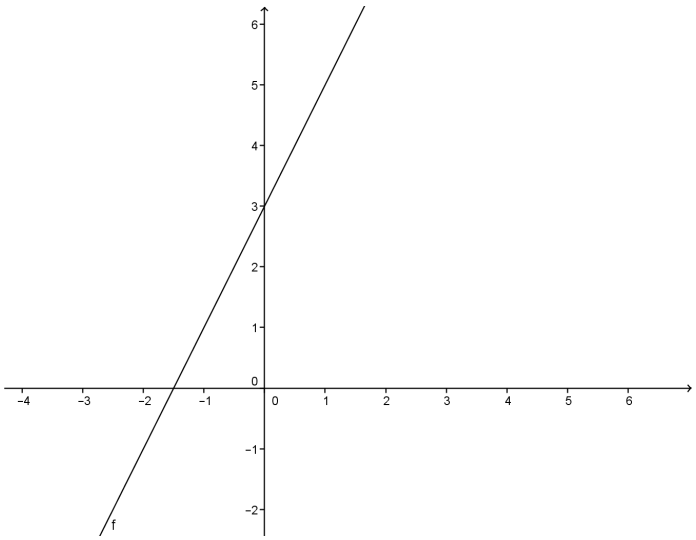


Jedná se o funkci: **RACIONÁLNĚ LOMENOU/NEPŘÍMOU ÚMĚRU**

Grafem je: **HYPERBOLA**

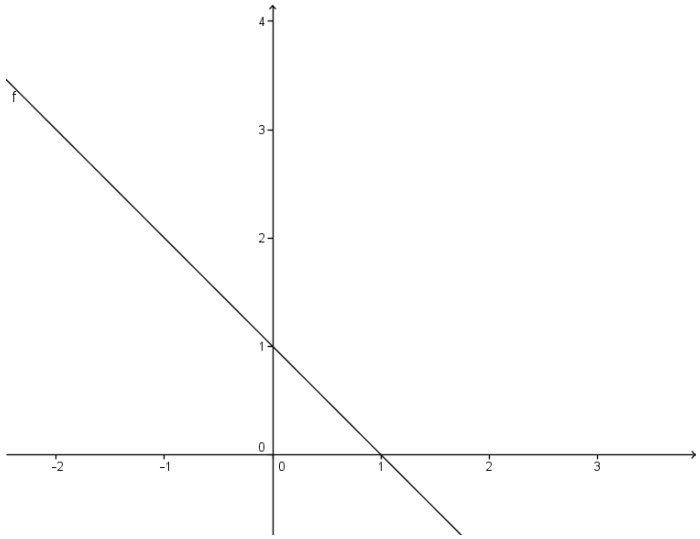
modifikace B, C – příklad 3:
V modifikaci pro žáka intaktního a žáka nadaného následuje příklad ověřující reálnou představu o výskytu dané funkce. Obecně u žáků často není vybudována žádná představa o souvislosti základních funkcí s reálným světem – nedokážou reálný děj/jev interpretovat pomocí funkce a nedokážou si za průběhem funkce představit nic konkrétního. Intaktní a nadaný žák by si měl být schopen minimálně lineární funkci spojit s reálnou situací.

modifikace B, C – příklad 3:
Máme funkci $f(x) = 2x + 3$. Znázorněte tuto funkci grafem a určete průsečíky s osou x a osou y. Pokuste se najít alespoň jeden konkrétní děj/jev, jehož průběh by mohl být popsán takovouto funkcí a popište jej. Pro konkrétní děj/jev diskutujte definiční obor s ohledem na konkrétní situaci.
Graf funkce bude přímka, funkce je rostoucí na celém definičním oboru. Průsečík s osou x bude v bodě $[-\frac{3}{2}, 0]$ a s osou y bude v bodě $[3, 0]$. Příkladem takové situace může být vývoj ceny nákupu x rohlíků, přičemž cena jednoho rohlíku je 2,-Kč a k nákupu vždy také zakoupíme tašku za 3,-Kč, avšak tento model má smysl pro $x \in \mathbb{N}_0$, tedy definiční obor by byl $D_f = \mathbb{N}_0$.



modifikace C, příklad 4:
Příklad zařazený pouze v modifikaci pro nadaného žáka. Ověřuje správné pochopení definičního oboru v případě, že funkce v uvedeném předpisu není spojitá, ale jedná se o bod odstranitelné nespojitosti.

Máme funkci $f(x) = \frac{2x^2}{x} - 3x + 1$. Určete definiční obor této funkce a její obor hodnot. Znázorněte funkci grafem a určete průsečíky s osou x a osou y.
Ze zadaného předpisu je nutné z definičního oboru vyloučit bod $x = 0$, protože se vyskytuje ve jmenovateli. Avšak po úpravě dostaneme $f(x) = 2x - 3x + 1 = -x + 1$, což je průběh funkce lineární. Graf funkce zadané, původní, bude stejný, avšak nespojitý v bodě $x = 0$. Průsečík s osou x bude v bodě $[1, 0]$, s osou y neexistuje s ohledem na definiční obor.



Ve všech modifikacích se vyskytuje příklad ověřující správné pochopení popisu funkce. Nemusí zde být uvedeny přesné definice – například v modifikaci A je postačující a očekává se vysvětlení na konkrétním grafu funkce. U žáka intaktního se pravděpodobně popis již bude vyskytovat v podobě matematické definice, ale není vyžadováno. Důležité je, aby z popisu, který žák uvede nebo vysvětlí na konkrétním příkladu bylo jasné, že pojem chápe správně.

modifikace A, příklad 3:
Pokuste se vysvětlit následující pojmy. Poté napište příklady funkcí, které splňují uvedené vlastnosti. Příklady takových funkcí můžete popsat grafem, nebo funkčním předpisem.

1. rostoucí funkce: $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, **resp. s rostoucím x roste (ostře) také funkční hodnota.**

   příklad funkce, která je rostoucí na celém definičním oboru: $f(x) = x$.

2. klesající funkce $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, **resp. s rostoucím x klesá (ostře) také funkční hodnota.**

   příklad funkce, která je na části svého definičního oboru klesající a na části rostoucí: $f(x) = x^2$.

3. maximum/minimum funkce: **lokální minimum nastává v bodě, kde funkce přechází z klesající na rostoucí a lokální maximum v bodě, kde funkce přechází z rostoucí na**

klesající.

příklad funkce, která má jedno lokální maximum v bodě $x = 0 : f(x) = -x^2$.

modifikace B, příklad 4 (navíc):

4. funkce je periodická: **část grafu se periodicky opakuje, resp.** $\exists p > 0 : \forall k \in \mathbb{Z} :$
   - $x \in D_f \Rightarrow x + kp \in D_f$
   - $\forall x \in D_f : f(x) = f(x + kp)$.

   příklad funkce, která je periodická: $f(x) = \sin x$, **resp. obrázek jakékoliv periodické funkce.**

modifikace C, příklad 5 (navíc):

5. funkce je monotónní: **je rostoucí nebo klesající nebo konstantní**

   příklad funkce, která má definiční obor uzavřený interval $[0, 5]$ a je monotónní: $f(x) = x$ pro $x \in [0, 5]$

6. funkce je periodická $f(x) = \sin x$.

   příklad funkce, která je periodická s periodou π : například $f(x) = \sin 2x$, **resp. obrázek jakékoliv periodické funkce s uvedenou periodou.**

modifikace A – příklad 4, modifikace B – příklad 5, modifikace C – příklad 6:
Příklad na správné chápání pojmu sudá/lichá funkce. U modifikace B je dále doplňující otázka na disjunkci pojmů a v modifikaci C na disjunkci a průnik pojmů. Je možné, že žák vysvětlí pojmy na konkrétním grafu, nebo podle tvaru grafu (osová souměrnost podle osy y v případě sudosti funkce, resp. středová souměrnost podle počátku soustavy souřadnic v případě lichosti funkce). Takováto odpověď je postačující.

Vysvětlete, kdy je funkce lichá a kdy je funkce sudá. U následujících funkcí rozhodněte, zda se jedná o lichou nebo sudou funkci.
Funkce je sudá jestliže $\forall x \in D_f : f(x) \in D_f$ **a** $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$ **a je lichá jestliže** $\forall x \in D_f : f(x) \in D_f$ **a** $\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$

1. $f(x) = 2x^2 + 1$

   Funkce je sudá, protože $2x^2 + 1 = f(x) = 2(-x)^2 + 1 = f(-x)$

2. $g(x) = -1.75x$

   Funkce je lichá, protože $g(x) = -1.75x = -(-1.75(-x)) = -g(-x)$

Může být funkce sudá a lichá zároveň? **Ano, ale taková je pouze konstantní funkce** $f(x) = 0$.
Může existovat funkce, která není ani sudá ani lichá? Pokud ano, napište příklad takové funkce a zdůvodněte. **Ano, takových funkcí je většina, například** $f(x) = x + 1$.

modifikace A – příklad 5, modifikace B – příklad 6, modifikace C – příklad 7:

Příklad na správné pochopení pojmu prosté funkce. Je možné, že žák vysvětlí pojmy na konkrétních ukázkách funkcí (například i grafem). Taková odpověď je akceptovatelná. U modifikace pro nadaného žáka je doplňující otázka.

Pokuste se vysvětlit, jakou funkci nazýváme prostou (tj. uveďte, kdy je funkce prostá).
Funkce je prostá, jestliže dvěma různým hodnotám x přiřazuje různé hodnoty y. Matematicky zapíšeme: $\forall x \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Z následujících funkcí vyberte funkce, které jsou prosté a zdůvodněte to.

1. $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ **není prostá**
2. $g(x) = 3x + 5$ **je prostá**
3. $h(x) = \frac{1}{x} + 3$ **je prostá**

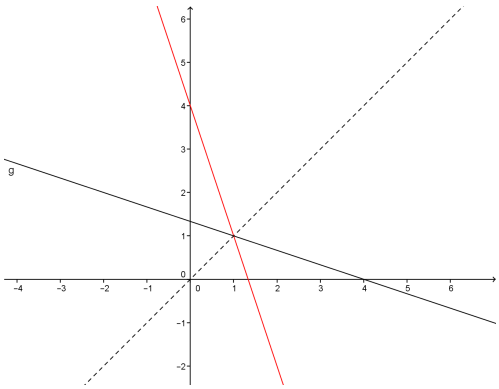
Lze z funkce, která není prostá, zúžením definičního oboru udělat funkci, která bude na zúženém definičním oboru s ní rovna a bude již prostá? Ukažte na příkladě.
Ano, lze. Do definičního oboru vezmeme pouze ten podinterval, na kterém je funkce prostá. Například u funkce $f(x) = x^2$, která není prostá zúžíme definiční obor na kladná reálná čísla.

modifikace A – příklad 6, modifikace B – příklad 7, modifikace C – příklad 8:
Příklad na ověření správného pochopení pojmu inverzní funkce. U žáka se specifickými vzdělávacími potřebami je vyžadována pouze konstrukce inverzní funkce a vysvětlení pojmu. U žáka intaktního se očekává také znalost vzájemného vztahu obou grafů a u žáka nadaného vzájemný vztah dalších charakteristik popisujících funkci.

Vysvětlete, co je inverzní funkce k dané funkci.
Inverzní funkce otáčí vzájemný vztah nezávislé proměnné x a závislé proměnné y v tom smyslu, že nezávislou proměnnou se stává y a závislou proměnnou x. Inverzní funkce existuje pouze k funkcím prostým.
K funkci $g(x)$ najděte funkci inverzní $g^{-1}(x)$. Určete definiční obor a obor hodnot původní funkce i inverzní funkce a obě funkce zakreslete do jednoho grafu.

$$g : y = \frac{-x+4}{3}.$$

Inverzní funkce bude $g^{-1}(x) : x = \frac{-y+4}{3}$, kde po vyjádření y dostaneme $g^{-1}(x) : y = -3x+4$. Graf obou funkcí je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu (v grafu vyznačeno šrafovaně). Černou barvou je funkce původní, červeně funkce k ní inverzní.



O jaké typy funkcí se v tomto případě jedná?
V tomto případě se jedná o lineární funkce.
Zachovávají se u inverzní funkce obecně nějaké vlastnosti nebo je mezi nima vazba (například monotónnost, definiční obor, obor hodnot,...)?
U inverzní funkce je definiční obor roven oboru hodnot funkce původní a naopak. Monotónnost se zachovává.

modifikace A – příklad 7, modifikace B – příklad 8, modifikace C – příklad 9:
Příklad na správnou korelaci pojmů s konkrétní podobou grafu nebo funkčního předpisu. Předpokládá se, že žáci funkci znázorní grafem, ale možná také funkčním předpisem. Obojí je správně. U modifikace A je v prvním případě jiné zadání kvůli nepozornosti ve čtení.

Napište vždy alespoň jeden příklad funkce, kter8 je:

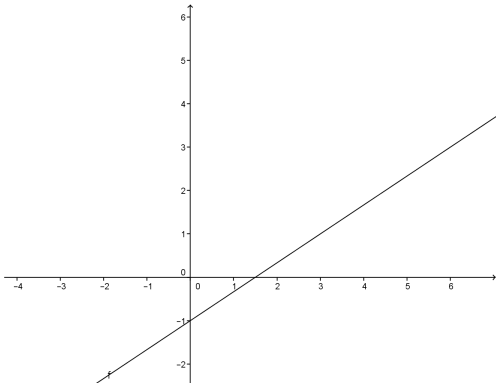
- lineární a prochází počátkem, tedy bodem $[0, 0]$:
  například $f(x) = x$
- kvadratická a nemá minimum:
  například $f(x) = -x^2$
- klesající na celém definičním oboru:
  například $f(x) = -x$
- lineární a neprochází počátkem, tedy bodem $[0, 0]$:
  například $f(x) = x + 1$
- kvadratická a nemá minimum, prochází bodem $[0, 2]$:
  například $f(x) = -x^2 + 2$
- lineární a klesající na celém definičním oboru:
  například $f(x) = -x$
- libovolná klesající a nemá definiční obor celé $\mathbb{R}$:
  například $f(x) = -x$ **pro** $x \in \mathbb{R}^+$.

modifikace A – příklad 8, modifikace B – příklad 9, modifikace C – příklad 10:
Příklad na ověření schopnosti celkově popsat zadanou funkci a znázornit jí grafem. Konkrétní typ funkce je odlišný u modifikace A, kde je zadaná pouze funkce lineární. U modifikace B a C je funkce racionálně lomená.

verze modifikace A – příklad 8:
Nakreslete graf zadané funkce $f(x)$, určete její definiční obor a obor hodnot. Rozhodněte, zda je tato funkce prostá, a zda je sudá/lichá. Dále určete, zda je funkce rostoucí nebo klesající. Určete průsečíky s osou x a osou y.

$$f : y = \frac{2x}{3} - 1.$$

Jedná se o funkci lineární, definiční obor jsou všechna reálná čísla, stejně jako obor hodnot. Funkce je na celém definičním oboru rostoucí a je prostá. Funkce není ani sudá, ani lichá. Průsečík s osou x je v bodě $[\frac{3}{2}, 0]$ a průsečík s osou y je v bodě $[0, -1]$.



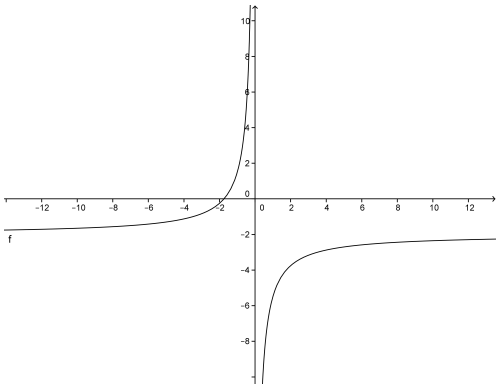
modifikace B – příklad 9, modifikace C – příklad 10:

Nakreslete graf níže uvedené lineárně lomené funkce $f(x)$ a určete její vlastnosti (definiční obor funkce, obor hodnot funkce, funkce je/není prostá, sudá/lichá funkce, je/není periodická, souřadnice průsečíků s osou x a y, rostoucí/klesající funkce).
V obou případech se jedná o stejnou funkci, avšak u žáka nadaného není v upraveném tvaru.

$$f : y = \frac{-4x - 7}{2x},$$

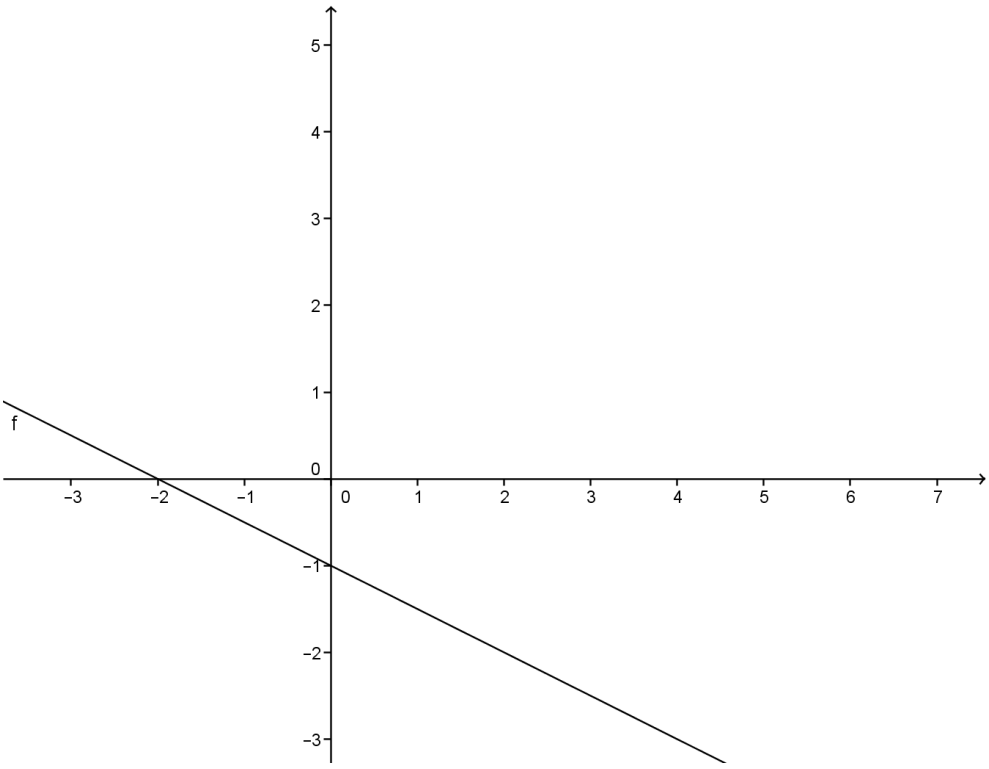
$$f : y = \frac{2x - 1}{2x} - \frac{3x + 3}{x}.$$

Jedná se o funkci racionálně lomenou, definiční obor jsou všechna reálná čísla bez nuly, obor hodnot jsou všechna reálná čísla bez čísla -2. Funkce je na obou částech definičního oboru rostoucí (tj. je rostoucí na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a je prostá. Funkce není ani sudá, ani lichá a není periodická. Průsečík s osou x je v bodě $[-\frac{7}{4}, 0]$ a průsečík s osou y s ohledem na definiční obor neexistuje.



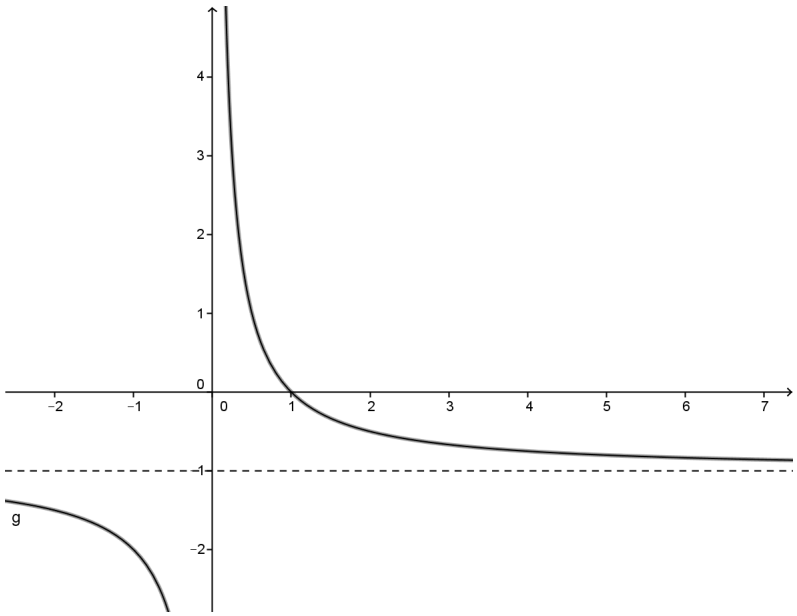
modifikace C – příklad 11, modifikace B – příklad 10 (pouze první graf):
Příklad je zařazen pouze u modifikace B a C a ověřuje schopnost číst z grafu natolik, že dle tvaru jednoduché funkce a průsečíků s osou x a y je žák schopen najít funkční předpis dané funkce.
K níže uvedeným grafům funkcí napište jejich funkční předpis. U každé z nich uveďte, o jaký typ funkce se jedná.

1.



Jedná se o funkci lineární. Protože je klesající, koeficient u lineárního členu bude záporný a protože prochází bodem $[0, -1]$ tak absolutní člen bude roven -1. Koeficient u lineárního členu lze dopočítat z toho, že graf prochází bodem $[-2, 0]$, tedy $0 = a(-2) - 1$, $a = 0.5$. Funkce bude mít předpis $f(x) = 0.5x - 1$.

2.



Jedná se o nepřímou úměru, tj. funkci racionálně lomenou. Funkce není v základním tvaru, je posunutá ve směru osy y dolů, tj. její předpis bude $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.