

FUNKCE
Popis pracovních listů a správné výsledky
Cílová skupina: žáci 3. a 4. ročníku SŠ

Označení modifikací:

Pracovní listy jsou rozděleny do tří modifikací: A, B a C.

Modifikace A je určena studentům se specifickými vzdělávacími potřebami, modifikace B je určena pro studenty intaktní/průměrné a skupina C pro studenty nadané.

Cílová skupina:

Cílová skupina jsou žáci 3. a 4. ročníku gymnázií a středních škol s maturitou. Pracovní listy lze použít i u středních odborných učilišť bez maturity, ovšem s ohledem na ŠVP dané školy.

Zařazení pracovních listů do výuky:

Pracovní listy jsou nastaveny pro ověření výstupních (nikoliv vstupních) znalostí žáků z tematického okruhu Funkce na střední škole v rozsahu státní maturity. Minimální potřebné znalosti jsou: základní pojmy – definiční obor, obor hodnot, vlastnosti funkcí – rostoucí/klesající, extrémy, parita funkce, periodická funkce, pojem prosté funkce, inverzní funkce, popis funkcí lineárních, kvadratických, případně mocninných, racionálně lomených, exponenciálních a logaritmických funkcí a znalosti goniometrických funkcí.

Časová náročnost:

Časová náročnost se může dle školy lišit, primárně je pracovní list nastaven na jednu vyučovací hodinu v délce 45 minut. U modifikace pro žáka nadaného je příkladů více, zde je pravděpodobné, že ne každý student stihne všechny příklady ve stanoveném čase. Dle jednotlivých příkladů bude patrné, do jaké míry žák pouze pojmy zná a rozumí jim, a také jak je dokáže aplikovat.

ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

Příklad 1 S pojmem funkce se setkáváme v matematice, stejně jako v ostatních přírodních vědách, velice často. Definujeme ji různými způsoby. Níže je uvedených několik různých zavedení pojmu reálné funkce jedné reálné proměnné – zakroužkujte ty, které považujete za správné a přeškrtněte ty nesprávné. U nesprávných uveďte, proč si myslíte, že nejsou dobré.

1. Funkce je matematický pojem, popisující vzájemný vztah dvou veličin, kdy se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na změnách hodnot veličiny druhé.

Ano, slovně lze funkci takto popsat.

2. Jestliže jsou množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$ (tj. podmnožiny reálných čísel), pak funkcí nazvme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$, tedy předpis f , který přiřazuje hodnotám $x \in A$ nějaké hodnoty $y \in B$. Předpis pak zapisujeme jako $y = f(x)$.

Nedefinuje funkci. Důležitý fakt je, že funkce je taková podmnožina kartézského součinu, kde pro jedno x může být přiřazeno nejvýše jedno y .

3. Funkce je jakékoliv zobrazení z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel.

Funkce je zobrazení na číselné množině, nicméně nemusí být z celého oboru reálných čísel.

Příklad 2 Víme, že funkce může být určena různými způsoby – funkčním předpisem (analyticky), grafem, tabulkou, nebo slovním popisem závislosti dvou veličin. Z následujících situací vyberte ty, které skutečně určují funkci.

1. $g : y = 5$

ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI, konkrétně o funkci konstantní.

2.

t	0	30	45	$\sqrt{2}$	90	120	135	150	180
F(t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{\pi}$	17.5	-125.8	$\frac{2\pi}{3}$	e^2	$\frac{5\pi}{6}$	11

ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI

3.

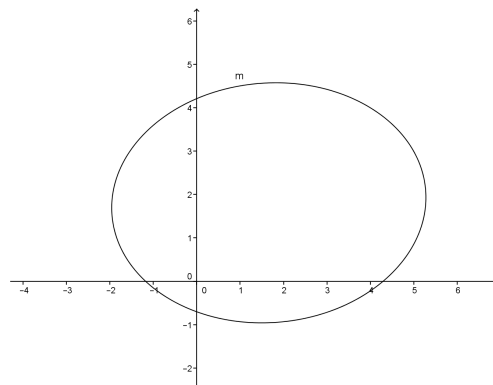
x	-1	0	1	-2	1	2	$\sqrt{4}$
h(x)	-3.5	0	7.1	6.3	-1.2	2.8	-1.2

NE, NEJEDNÁ SE O FUNKCI. HODNOTĚ 1 i hodnotě $2 = \sqrt{4}$ JSOU TOTIŽ PŘÍŘAZENY DVĚ RŮZNÉ HODNOTY, COŽ U FUNKCE NESMÍ BÝT

4. $k(x) = x^{\sin x}$

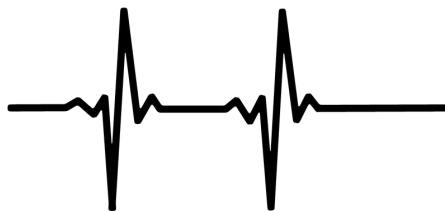
ANO, JEDNÁ SE O FUNKCI

5.



NE, NEJEDNÁ SE O FUNKCI. NA GRAFU VIDÍME, ŽE HODNOTÁM x JSOU PŘÍŘAZENY DVĚ RŮZNÉ HODNOTY, COŽ U FUNKCE NESMÍ BÝT – TO TAKÉ POZNÁME PODLE TOHO, ŽE PŘÍMKY ROVNOBĚŽNÉ S OSOU y NESMÍ GRAF PROTNOUT VE VÍCE NEŽ JEDNOM BODĚ, COŽ V TOMTO PŘÍPADĚ SPLNĚNO NENÍ - PROTÍNÁJÍ JE VE DVOU BODECH.

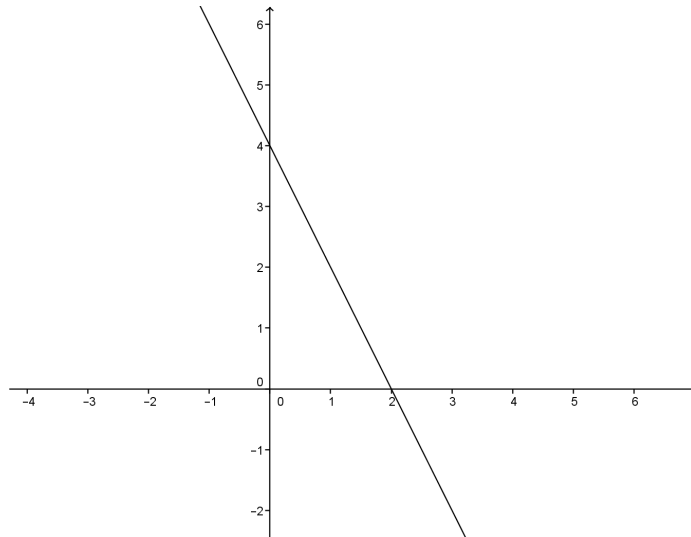
6.



Ano, obrázek může demonstrovat průběh nějaké funkce, pokud budeme uvažovat v klasickém značení osu x horizontálně a osu y vertikálně.

Příklad 3 Pokuste se pojmenovat níže uvedené funkce (o jaký typ funkce se jedná) a pojmenujte graf daných funkcí. U každé z uvedených funkcí uveďte, zda se jedná o funkci sudou, lichou, případně periodickou (v případě periodické napište, jaká je perioda). Dále rozhodněte, zda se jedná o funkci prostou.

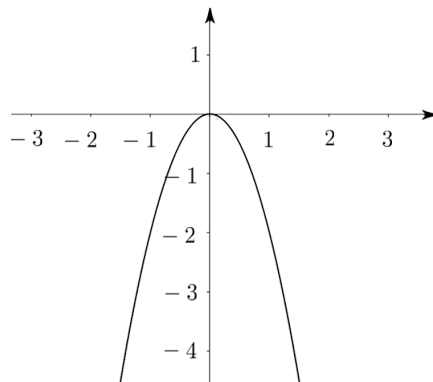
1.



Jedná se o funkci: **LINEÁRNÍ**, není sudá ani lichá, není periodická, je prostá.

Grafem je: **PŘÍMKA**

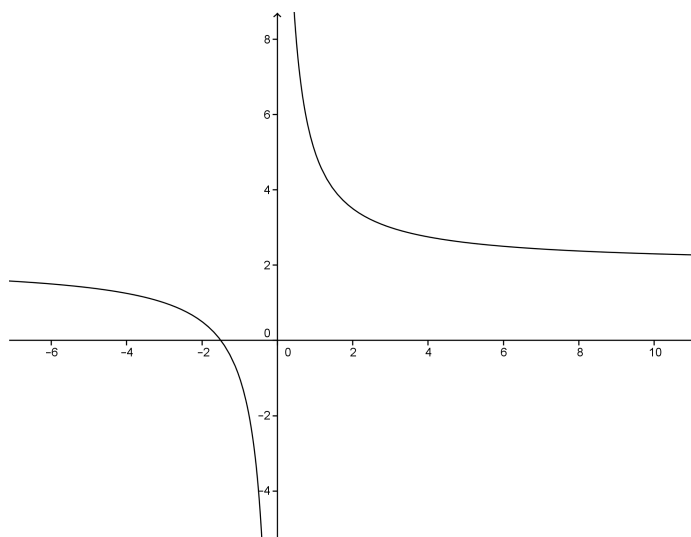
2.



Jedná se o funkci: **KVADRATICKOU**, je sudá, není lichá, není periodická, není prostá.

Grafem je: **PARABOLA**

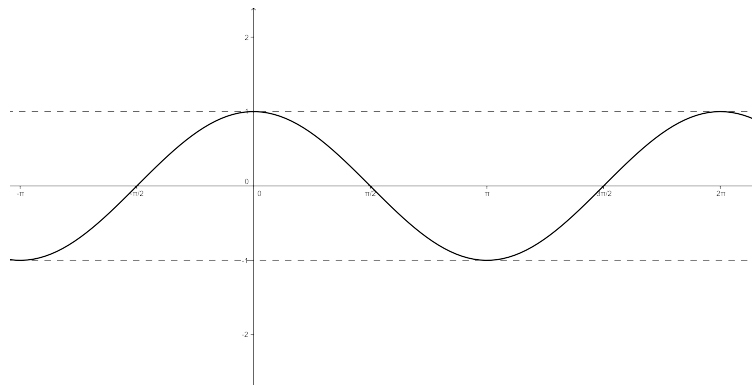
3.



Jedná se o funkci: **RACIONÁLNĚ LOMENOU/NEPŘÍMOU ÚMĚRU**, není sudá ani lichá, není periodická, je prostá.

Grafem je: **HYPERBOLA**

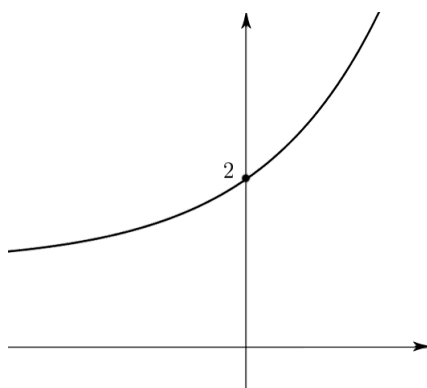
4.



Jedná se o funkci: **GONIOMETRICKOU (kosínus)**, je sudá, není lichá, je periodická s periodou 2π , není prostá.

Grafem je: **sinusoida/cosinusoida**

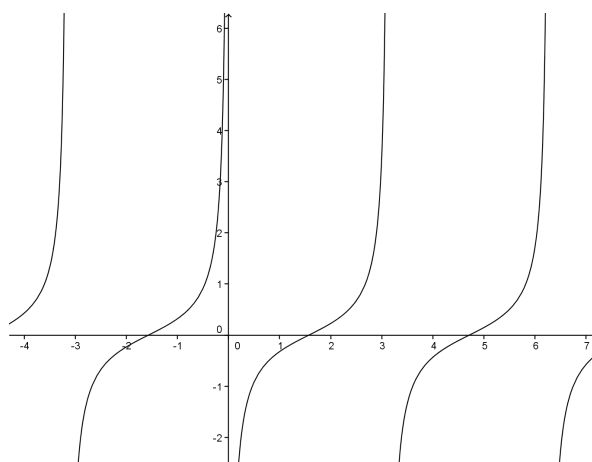
5.



Jedná se o funkci: **exponenciální**, není sudá ani lichá, není periodická, je prostá.

Grafem je: **exponenciála**

6.



Jedná se o funkci: **goniometrickou (tangens)**, není sudá, je lichá, je periodická s periodou π , není prostá.

Grafem je: **tangentoida (není v základním tvaru)**

Příklad 4 Napište vztah pro výpočet objemu rotačního kužele.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

kde r je poloměr podstavy a v je výška kužele.

V tomto vztahu rozhodněte, jak závisí objem na

1. výšce kužele **závisí lineárně**
2. poloměru jeho podstavy, **kvadraticky**
3. obsahu jeho podstavy. **lineárně, protože obsah podstavy je πr^2 .**

Příklad 5 Rozhodněte, jak závisí dráha (ujetá vzdálenost) na čase v případě:

1. pohybu přímočarého, rovnoměrného: **závisí lineárně, $s = vt$, kde s je dráha, v je rychlost, která je v tomto případě konstantní a t je čas.**
2. pohybu přímočarého, rovnoměrně zrychleného: **závisí kvadraticky, $s = \frac{1}{2}at^2$, kde a je zrychlení**
3. že těleso setrvává v klidu: **ujetá vzdálenost je konstantní, nulová**

Příklad 6 Závislost hustoty ρ dané látky na hmotnosti m a objemu V je určena takovýmto vztahem:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé a zdůvodněte.

1. Hustota je nepřímo úměrná objemu. **Pravdivé.**
2. Hustota je přímo úměrná objemu. **Nepravdivé, čím větší objem za dané hmotnosti látka zaujme, tím menší je hustota.**
3. Hustota je přímo úměrná hmotnosti. **Pravdivé.**
4. Pro danou látku je hmotnost lineárně závislá na objemu. **Pravdivé, ze vztahu převedením dostaneme**

$$V\rho = m.$$

Příklad 7 Mějme funkci $f(x) = 2x^2 + 1$. Diskutujte graf následujících funkcí vůči této funkci (tj. jak se graf níže uvedené funkce bude lišit od grafu této funkce $f(x)$):

1. $g_1(x) = 2x^2 - 5$.

Graf této funkce bude vůči funkci $f(x)$: **posunutý dolů ve směru osy y**

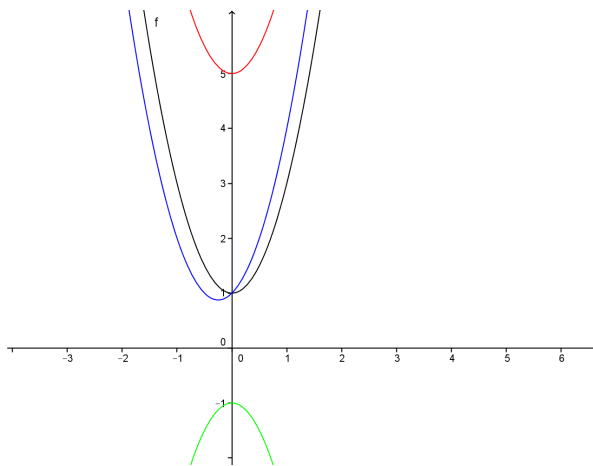
2. $g_2(x) = -2x^2 - 1$.

Graf této funkce bude vůči funkci $f(x)$: **zrcadlově převrácený podle osy x**

3. $g_3(x) = 2x^2 + x + 1$.

Graf této funkce bude vůči funkci $f(x)$: **posunutý ve směru osy y** .

Graf je na obrázku níže, černě původní funkce $f(x)$, červeně funkce $g_1(x)$, zeleně funkce $g_2(x)$, a modře funkce $g_3(x)$.



Příklad 8 Mějme funkci $f(x) = 2^x - 3$. Diskutujte graf následujících funkcí vůči této funkci:

1. $g_1(x) = 2^x$.

Graf této funkce bude vůči funkci $f(x)$: **posunutý nahoru ve směru osy y**

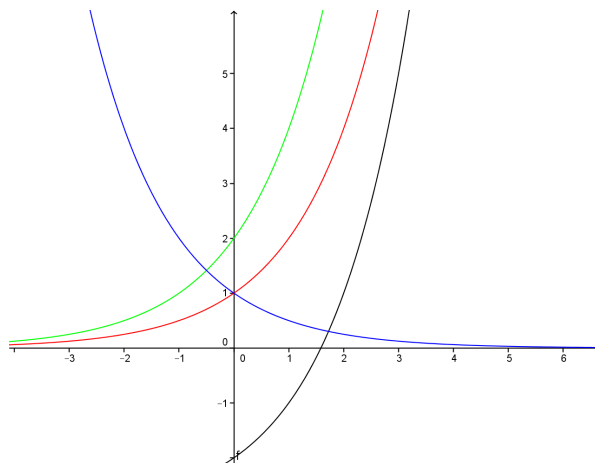
2. $g_2(x) = 2^{x+1}$

Graf této funkce bude vůči funkci $f(x)$: **posunutý vlevo ve směru osy x a nahoru ve směru osy y**

3. $g_3(x) = 2^{-x}$.

Graf této funkce bude vůči funkci $f(x)$: **zrcadlově převrácený podle osy y a posunutý nahoru. Vůči funkci $g_1(x)$ bude pouze zrcadlově převrácený.**

Graf je na obrázku níže, černě původní funkce $f(x)$, červeně funkce $g_1(x)$, zeleně funkce $g_2(x)$, a modře funkce $g_3(x)$.



Příklad 9 Napište vždy alespoň jeden příklad funkce, která je:

1. zdola omezená, $y = x^2$ **je omezená zdola, protože** $H_f = [1, \infty)$
2. nespojitá alespoň v jednom bodě, $y = \frac{1}{x}$ **je nespojitá v bodě** $x = 0$.
3. omezená zdola i shora, $y = \sin x$, **protože** $H_f = [-1, 1]$

a dokažte, že taková je. Příklady funkcí můžete popsat grafem, nebo funkčním předpisem.

Příklad 10 Určete definiční obor funkce

$$g(x) = \log(x - 3)$$

a sestrojte její graf.

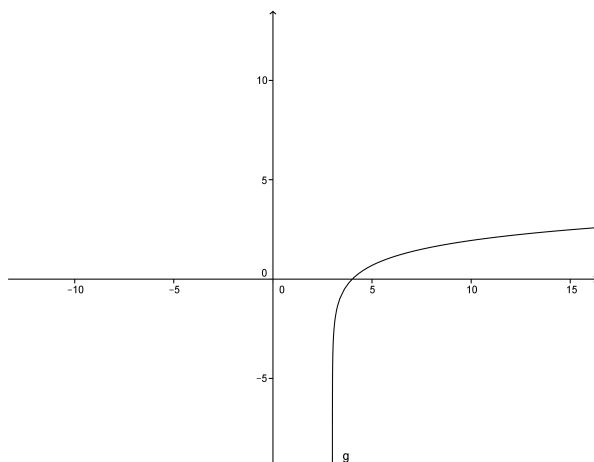
Definiční obor bude $(3, \infty)$, **neboť** $x - 3 > 0$.

Určete, zda se jedná o funkci rostoucí, nebo klesající. **Funkce je rostoucí.**

K funkci $g(x)$ najděte funkci inverzní $g^{-1}(x)$.

Inverzní funkce bude $g_{-1} : y = 10^x + 3$.

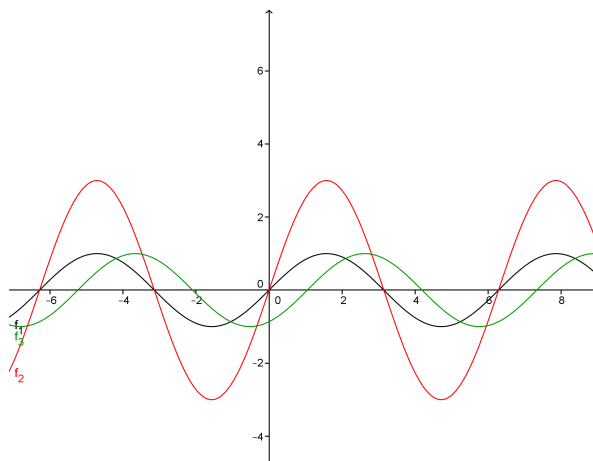
Graf je na obrázku níže.



Příklad 11 Nakreslete grafy následujících funkcí. Určete jejich definiční obor, obor hodnot a v případě, že jsou periodické určete periodu.

1. $f_1(x) = \sin x$
2. $f_2(x) = 3 \sin x$
3. $f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

Graf je na obrázku níže, černě je funkce $f_1(x)$, červeně funkce $f_2(x)$, zeleně funkce $f_3(x)$.



Definiční obor jsou ve všech třech příkladech reálná čísla a **obory hodnot** jsou $H_{f_1} = [-1, 1]$, $H_{f_2} = [-3, 3]$ a $H_{f_3} = [-1, 1]$. **Všechny funkce jsou periodické s periodou 2π .**

Příklad 12 V matematice často popisujeme tzv. základní typy funkcí, například lineární, kvadratická, mocninná, exponenciální, atd.). Ostatní funkce pak dostaneme jako jejich součet, rozdíl, součin nebo podíl. U následujících funkcí diskutujte, zda se jedná o funkci základní, nebo vznikla některým z popsaných postupů. Pokud vznikla jako součet, rozdíl, součin nebo podíl, určete základní funkce a popište, jak z nich vznikla.

1. $f_1(x) = 2x^2 - \sin x$ **Jedná se o rozdíl/součet kvadratické funkce $2x^2$ a goniometrické funkce $\sin x$.**
2. $f_2(x) = 5^x + 2x + 1$ **Jedná se o součet exponenciální funkce 5^x a lineární funkce $2x + 1$.**
3. $f_3(x) = \pi$ **Jedná se o základní funkci – konstantní.**

Musí být kladen nějaký požadavek na definiční obory / resp. obory hodnot dílčích základních funkcí, z nichž tvoříme nové funkce tímto postupem? **Ano, nová funkce má definiční obor, který je průnikem definičních oborů základních funkcí.**

Příklad 13 Máme zadány tyto funkce: $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \sin x$, $m(x) = \frac{1}{x} + 2$. Vytvořte následující funkce:

1. $f(x) \cdot g(x) = x^2 e^x$.
2. $h^2(x) = \sin^2 x$.
3. $g(x) + 5 \cdot m(x) = e^x + \frac{5}{x} + 10$.

Příklad 14 Funkce můžeme také dostat skládáním jiných funkcí. U následujících funkcí diskutujte, zda se jedná o funkci základní, nebo o funkci, která vznikla složením jiných funkcí. Pokud vznikla složením jiných funkcí, určete základní funkce.

1. $g_1(x) = \cos^3 x$ **Složením goniometrické funkce $\cos x$ – vnitřní složka a mocninné/kubické funkce x^3 – vnější složka.**

2. $g_2(x) = 2^{x^2}$ Složením exponenciální funkce 2^x – vnější složka a kvadratické x^2 – vnitřní složka.
3. $g_3(x) = \ln x^4$ Složením logaritmické funkce $\ln x$ – vnější složka a mocninné funkce x^4 – vnitřní složka.

Musí být kladen nějaký požadavek na definiční obory / resp. obory hodnot dílčích základních funkcí, z nichž tvoříme nové funkce tímto postupem?

Ano.

Příklad 15 Máme zadány tyto funkce: $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \sin x$, $m(x) = \frac{1}{x} + 2$. Vytvořte následující funkce:

1. $h(f(x)) = \sin x^2$.
2. $f(g(x)) = (e^x)^2 = e^{2x}$.
3. $m(h(f(x))) = \frac{1}{\sin x^2} + 2$.

Příklad 16 Mohou být ve speciálních případech některé z funkcí $h(f(x))$, $f(h(x))$, $f(x) \cdot h(x)$, $h(x) \cdot f(x)$ stejné? Kdy a pro jaké tvary funkcí $f(x)$, $h(x)$?

Obecně jsou tyto funkce různé, ale ve speciálním případě mohou být stejné, například u skládání pro $h(x) = f(x)$ bude $f(h(x)) = f(x) \cdot h(x)$, nebo ve stejném případě bude $f(x) \cdot h(x) = h(x) \cdot f(x)$.